



Математические методы решения биометрических задач

Лекция 1. Повышение разрешения изображений

А.С. Крылов

Лаборатория математических методов обработки изображений

<http://imaging.cs.msu.ru>

Кафедра математической физики

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова



Повышение разрешения изображений

- **Введение**
- **Линейные методы повышения разрешения**
 - Примеры интерполяции
 - Представление в общем виде
 - Недостатки линейных методов
- **Нелинейные методы**
 - Примеры нелинейных методов
 - Регуляризирующий метод
- **Суперразрешение**



Введение

- Изображения представляются в виде двумерной матрицы пикселей
- Как увеличить размер изображения?





Введение

- Увеличение методом «ближайшего соседа», или повторением пикселей



Недостаток
Изображение
получается **СИЛЬНО**
пикселизованным





Повышение разрешения изображений

- Введение
- **Линейные методы повышения разрешения**
 - **Примеры интерполяции**
 - Представление в общем виде
 - Недостатки линейных методов
- **Нелинейные методы**
 - Примеры нелинейных методов
 - Регуляризирующий метод
- Суперразрешение



Повышение разрешения изображений

Интерполяция

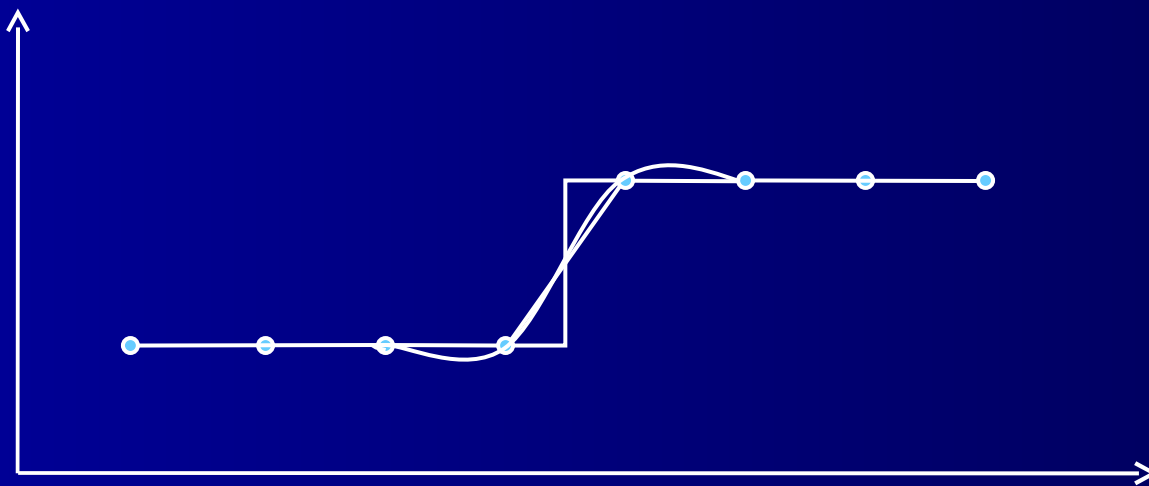
- Интерполяция изображений
 - Изображение представляется в виде функции
 - Пиксели изображений являются точками, в которых значение функции известно
 - Сутью повышения разрешения изображений является нахождение значений функции в промежуточных точках



Повышение разрешения изображений

Интерполяция

- Невозможно точно восстановить информацию

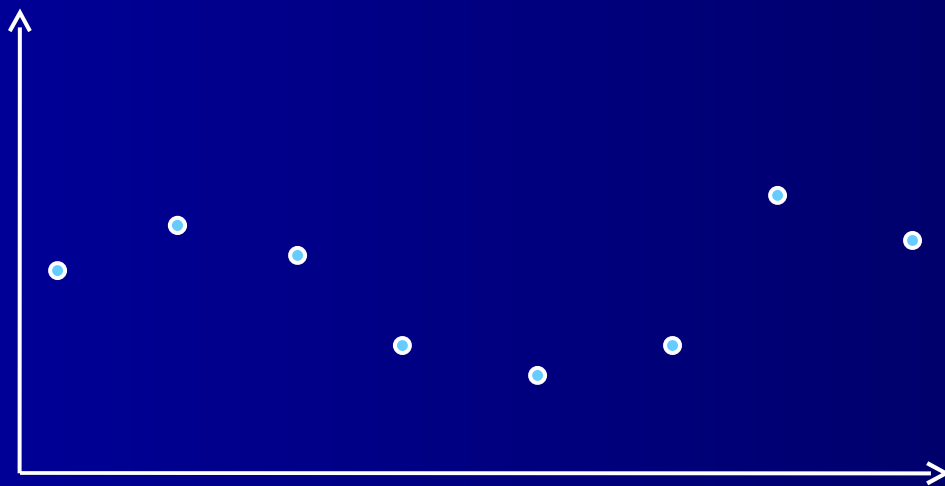




Линейные методы повышения разрешения

Примеры интерполяции

- Интерполяция – нахождение промежуточных значений по имеющемуся дискретному набору известных значений.

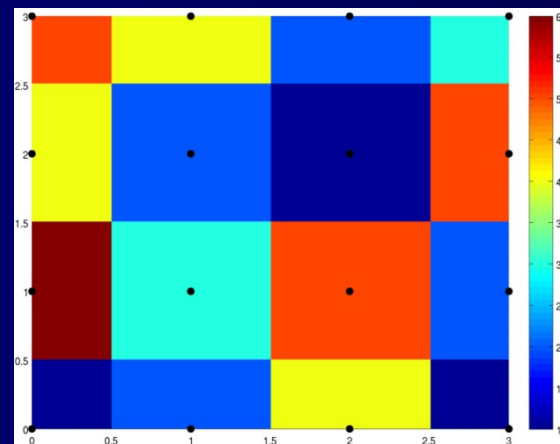
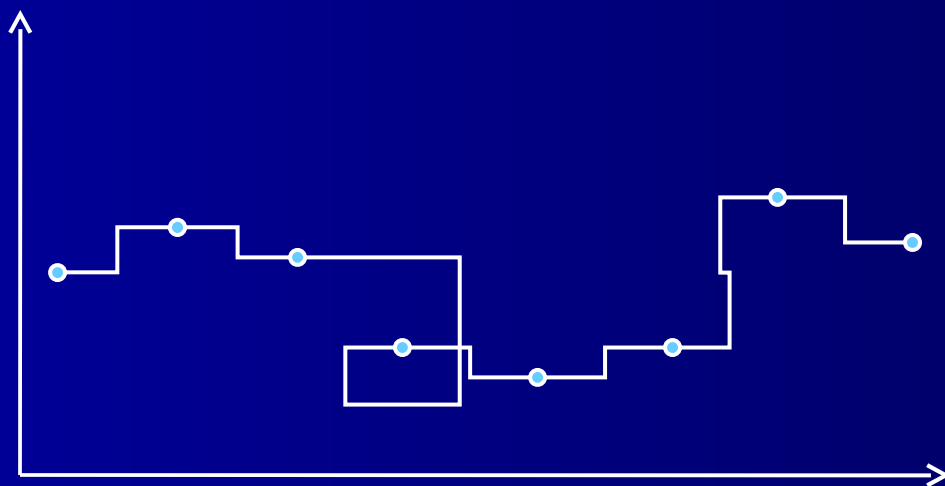




Линейные методы повышения разрешения

Примеры интерполяции

- Существуют разные способы интерполяции. На этом слайде показан метод «ближайшего соседа»

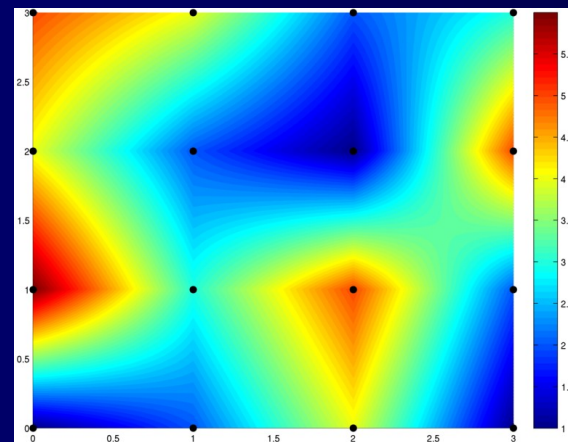
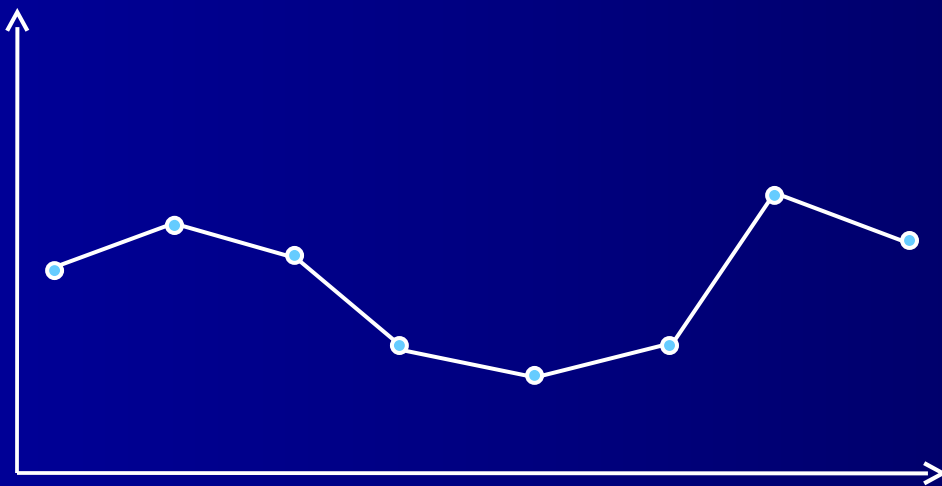




Линейные методы повышения разрешения

Примеры интерполяции

- Функция становится более гладкой, если вместо ступенек соединять точки прямыми. Это простейшая линейная интерполяция первого порядка

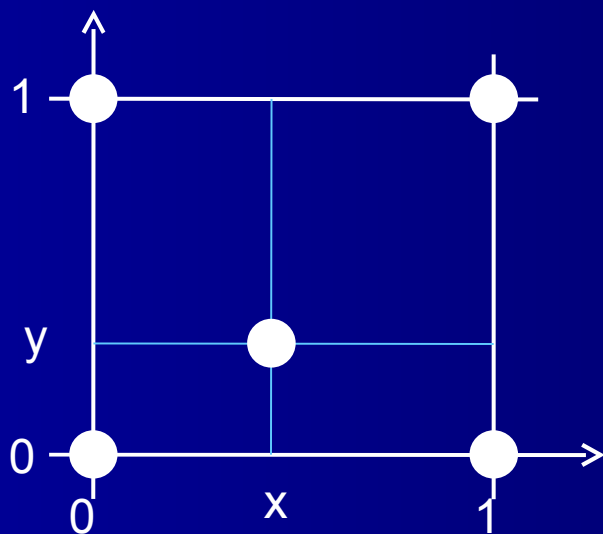




Линейные методы повышения разрешения

Примеры интерполяции

- Билинейная интерполяция – это линейная интерполяция первого порядка в двумерном случае



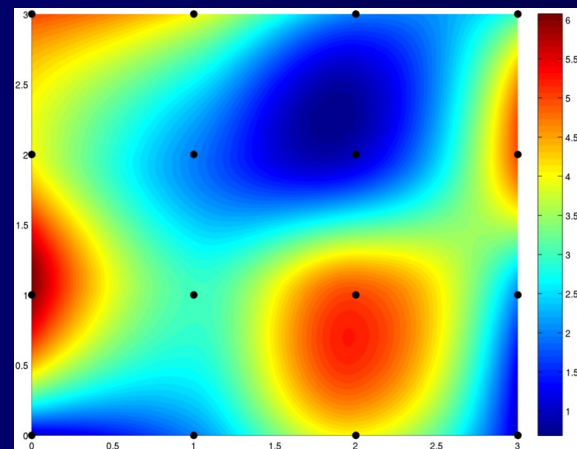
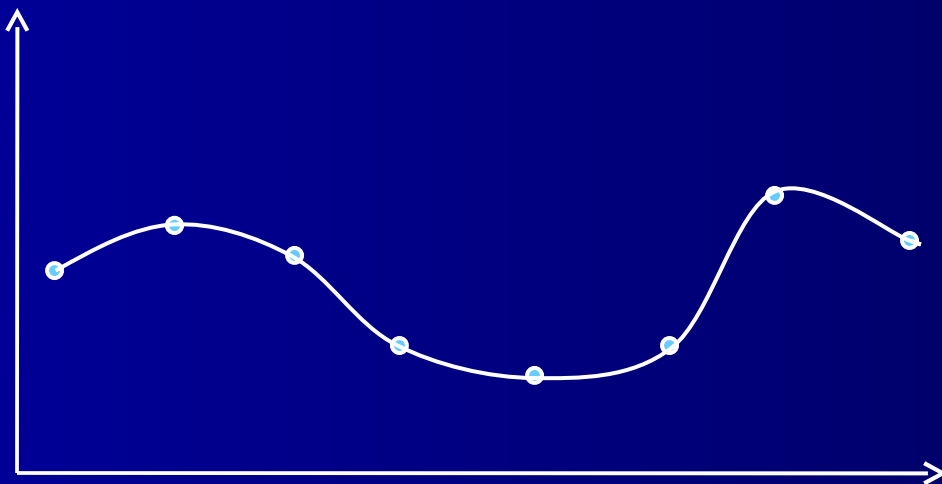
$$\begin{aligned} f(x, y) &= \\ &= (1-x)(1-y)f(0,0) + \\ &+ x(1-y)f(1,0) + \\ &+ (1-x)yf(0,1) + \\ &+ xyf(1,1) \end{aligned}$$



Линейные методы повышения разрешения

Примеры интерполяции

- Функцию можно также аппроксимировать с помощью кубических сплайнов. Этот метод наиболее широко используется в программах обработки изображений

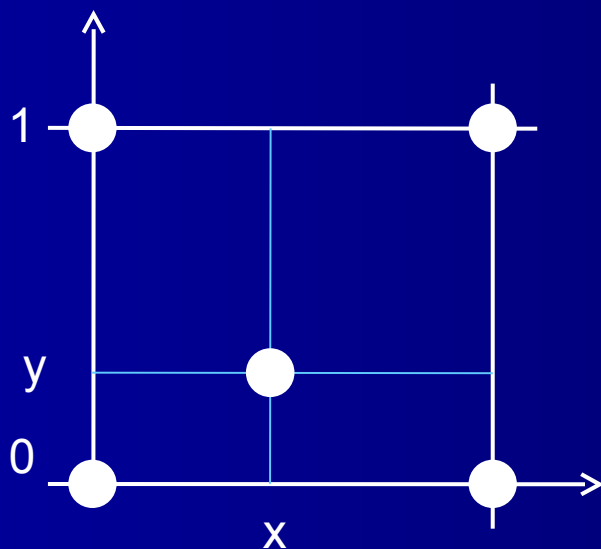




Линейные методы повышения разрешения

Примеры интерполяции

- Интерполяцию кубическими сплайнами в двумерном случае называют бикубической интерполяцией



$$f(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{i,j} x^i y^j$$

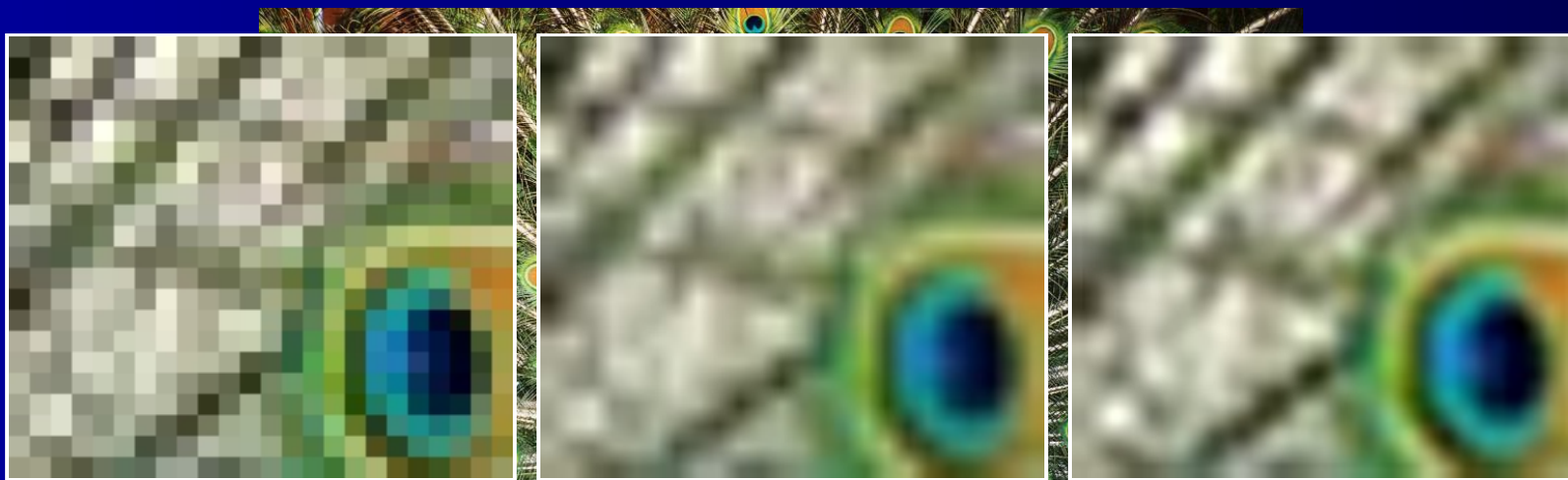
- Есть различные методы выбора параметров $a_{i,j}$



Линейные методы повышения разрешения

Примеры интерполяции

- Сравнение простейших методов интерполяции



Метод «ближайшего соседа»

Билинейная интерполяция

Бикубическая интерполяция





Повышение разрешения изображений

- Введение
- **Линейные методы повышения разрешения**
 - Примеры интерполяции
 - **Представление в общем виде**
 - Недостатки линейных методов
- **Нелинейные методы**
 - Примеры нелинейных методов
 - Регуляризирующий метод
- Суперразрешение



Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

- Любой линейный метод представляет собой свёртку

$$f(x) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} F(i)K(i-x)$$

- В двумерном случае

$$f(x, y) = \sum_{i, j=-\infty}^{+\infty} F(i, j)K(i-x)K(j-y)$$

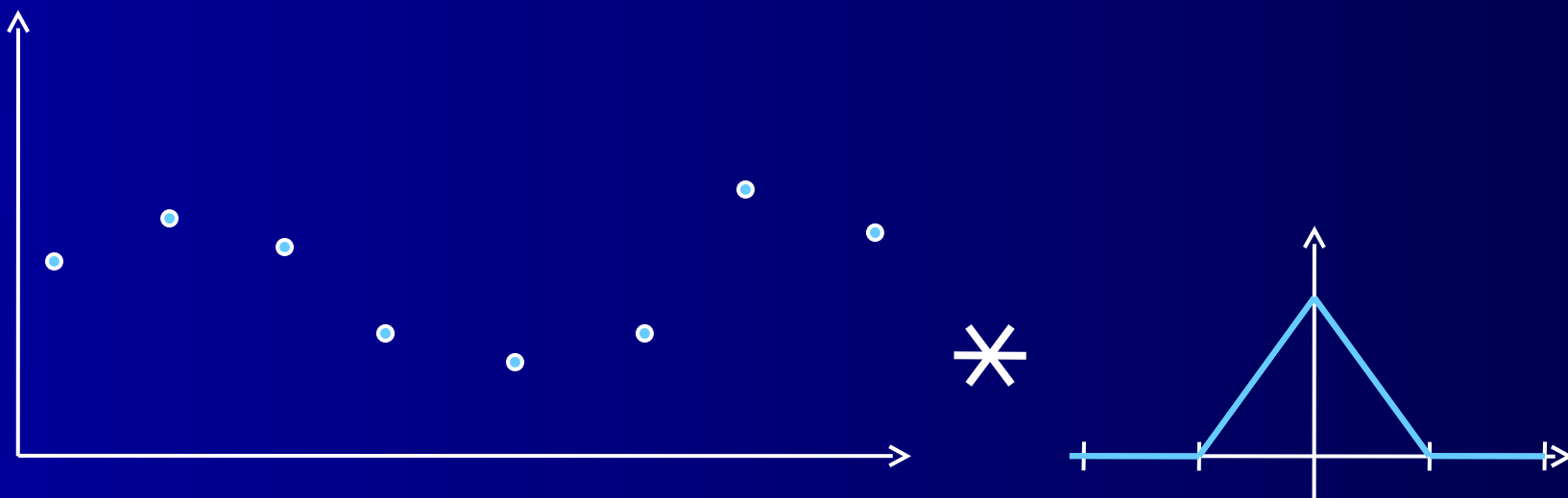
- Результат зависит от выбора ядра K



Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

- Пример

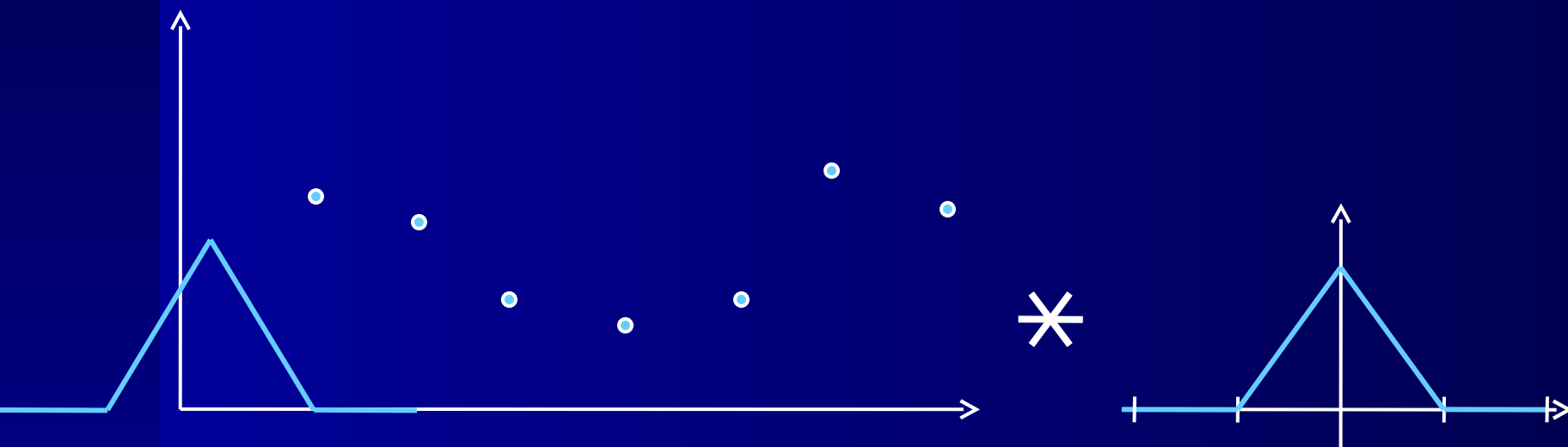




Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

- Пример

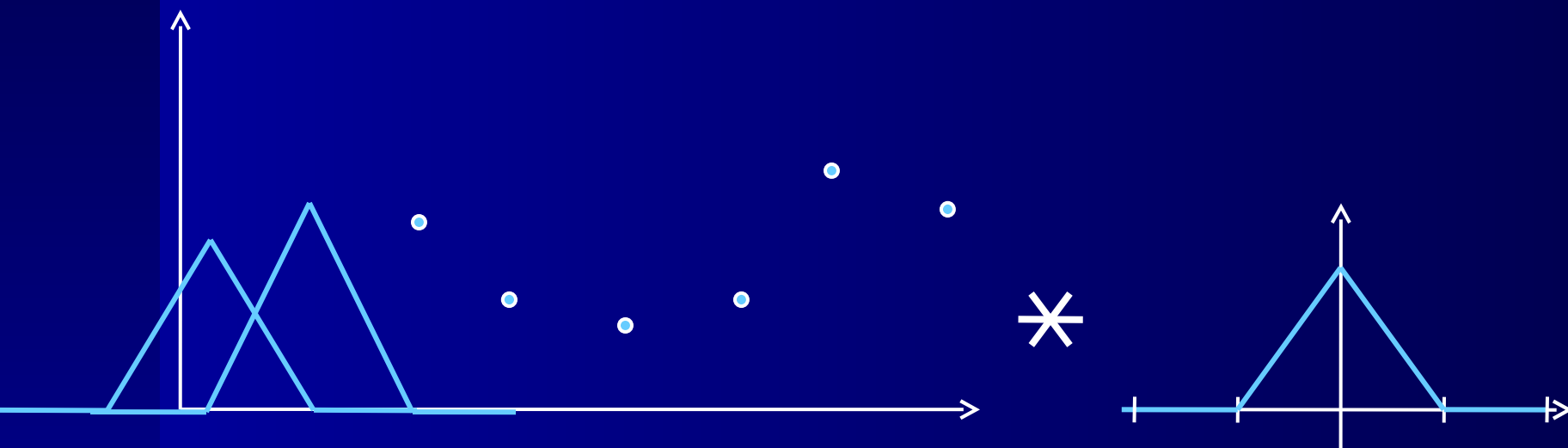




Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

- Пример

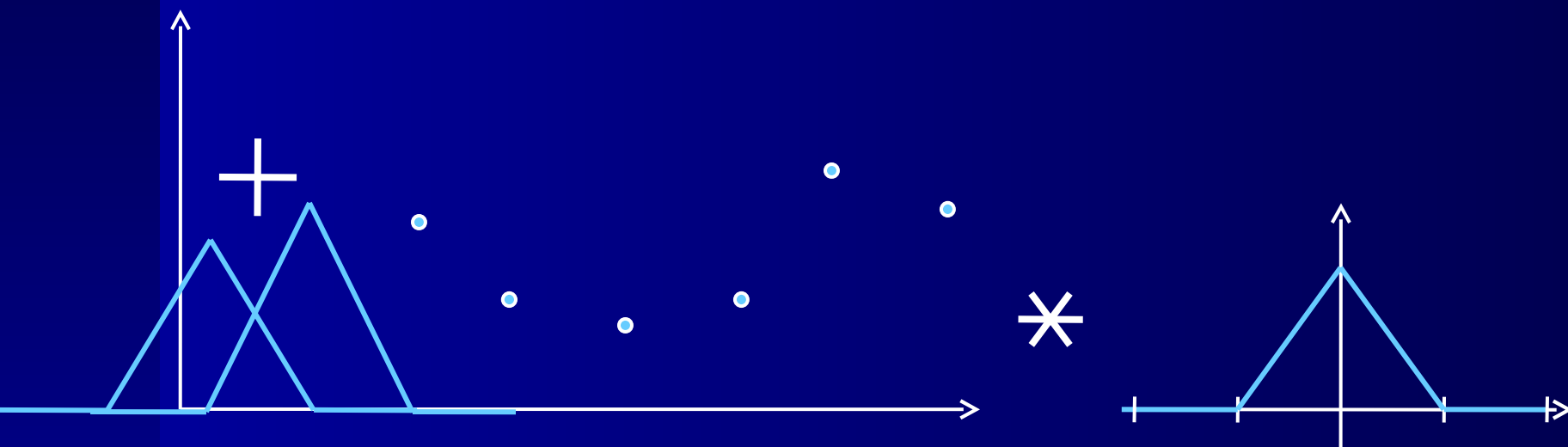




Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

■ Пример

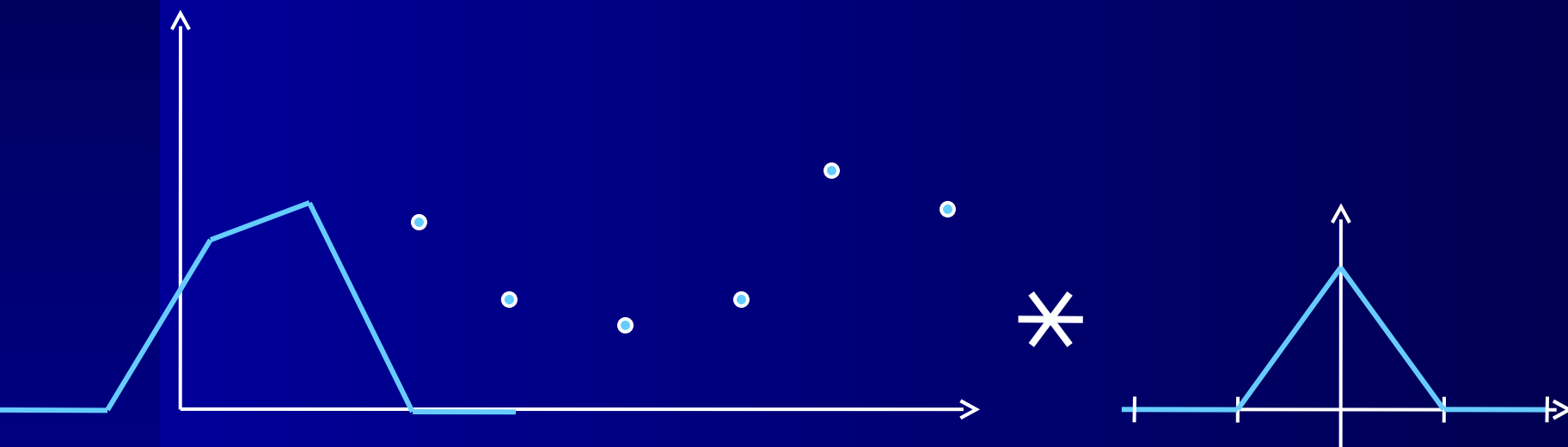




Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

- Пример

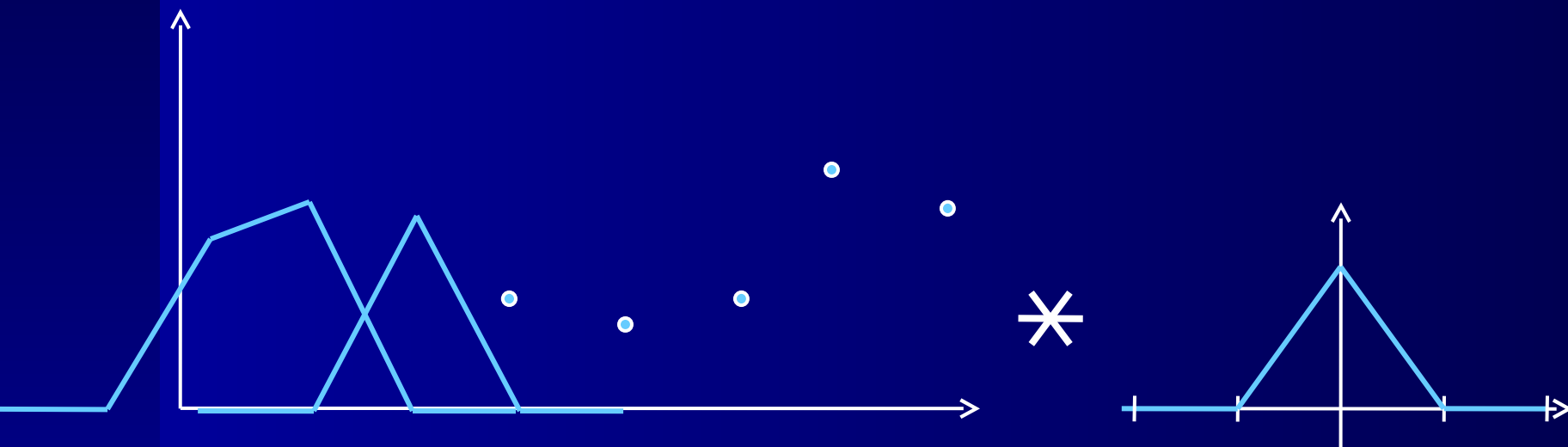




Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

- Пример

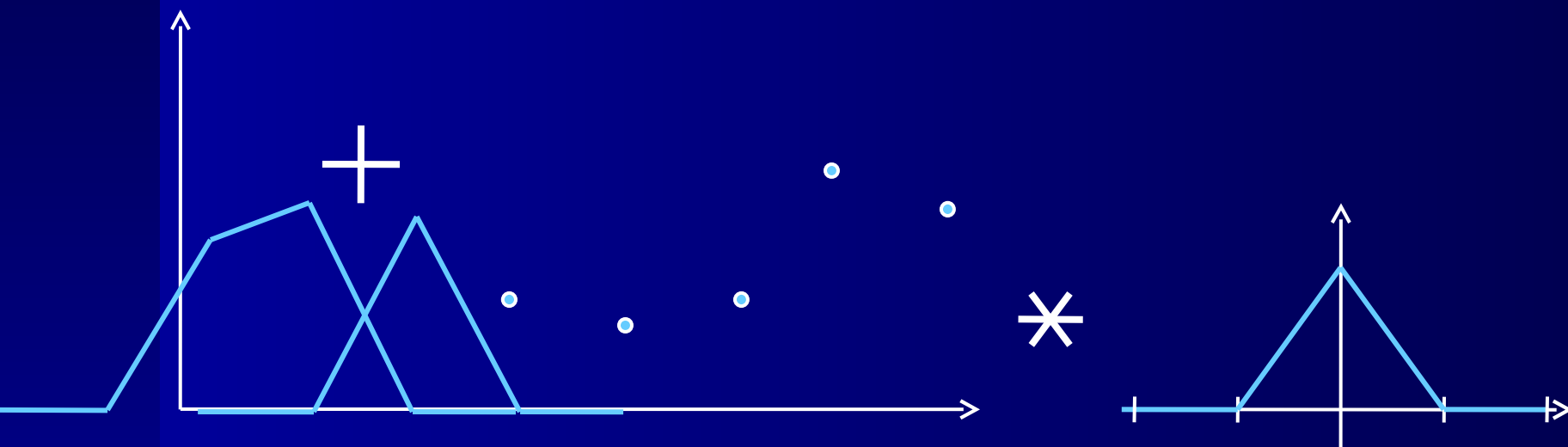




Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

■ Пример

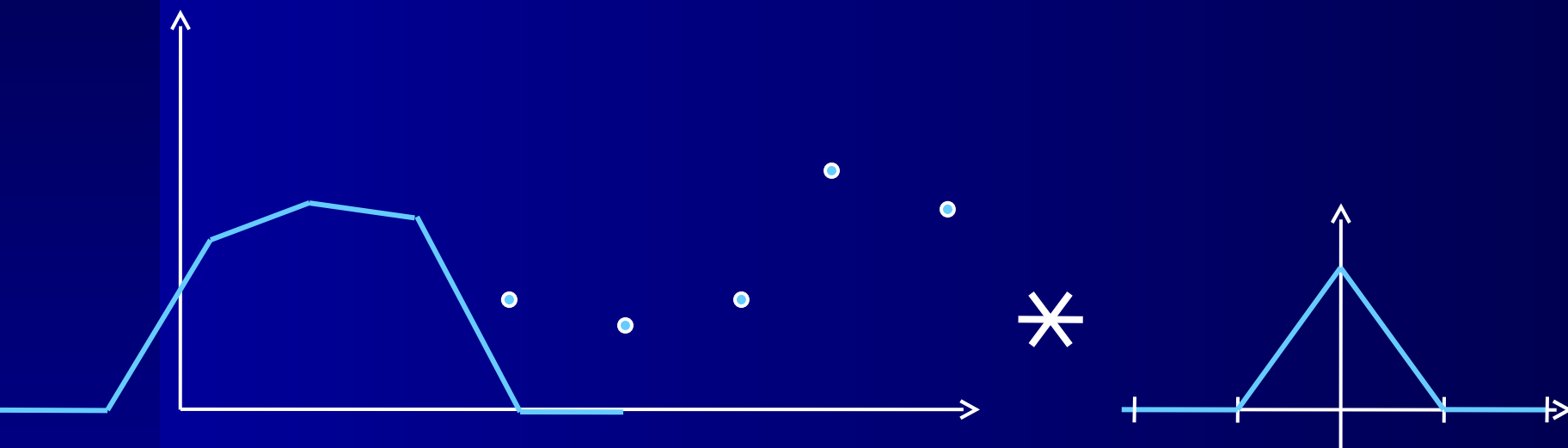




Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

- Пример

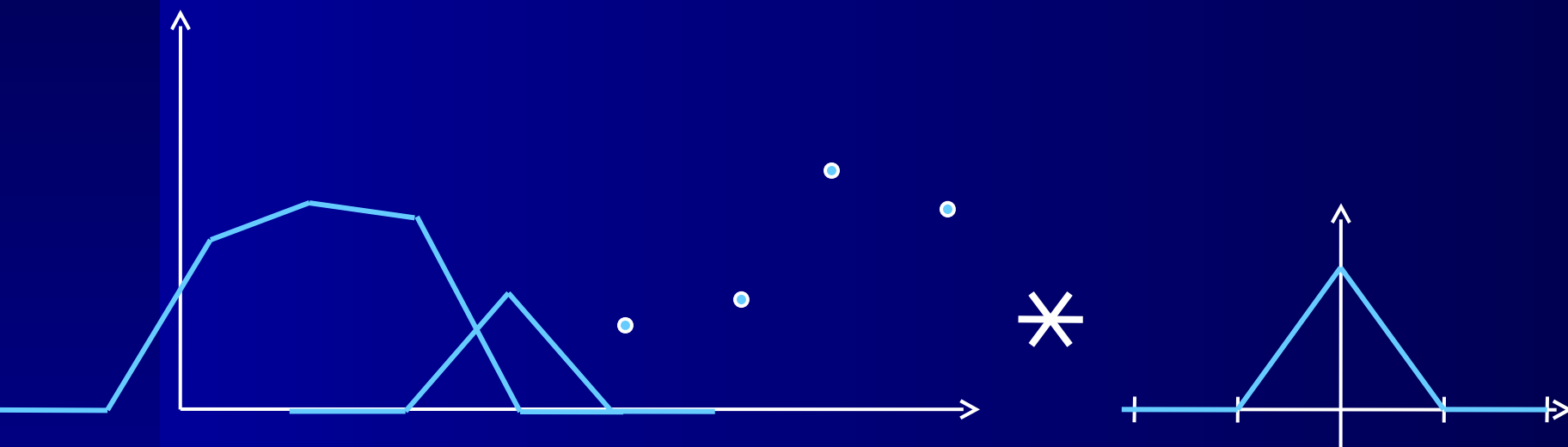




Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

- Пример

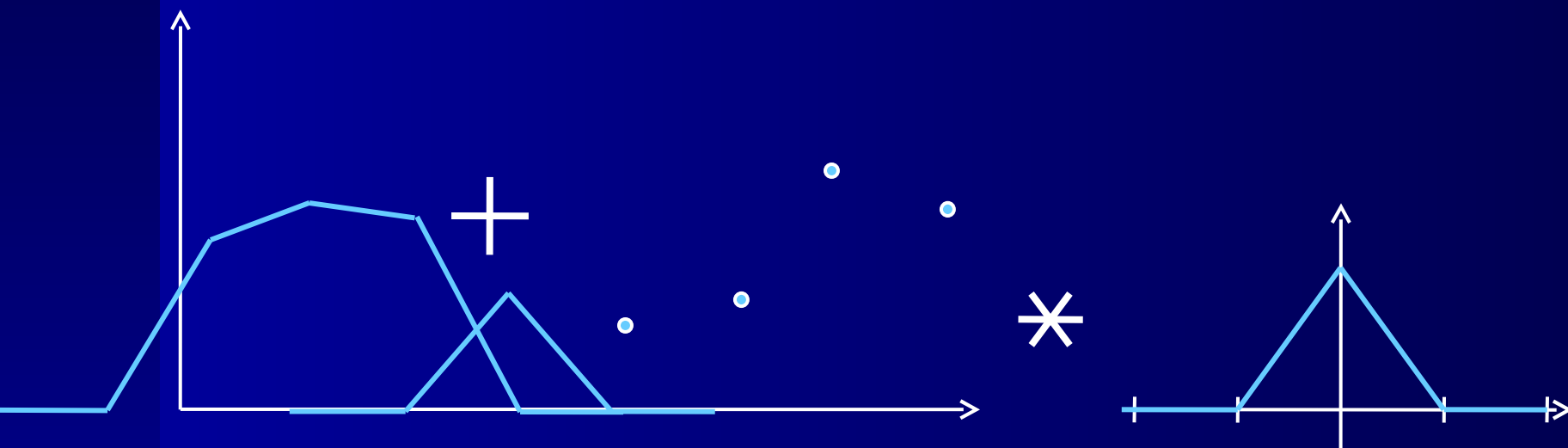




Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

- Пример

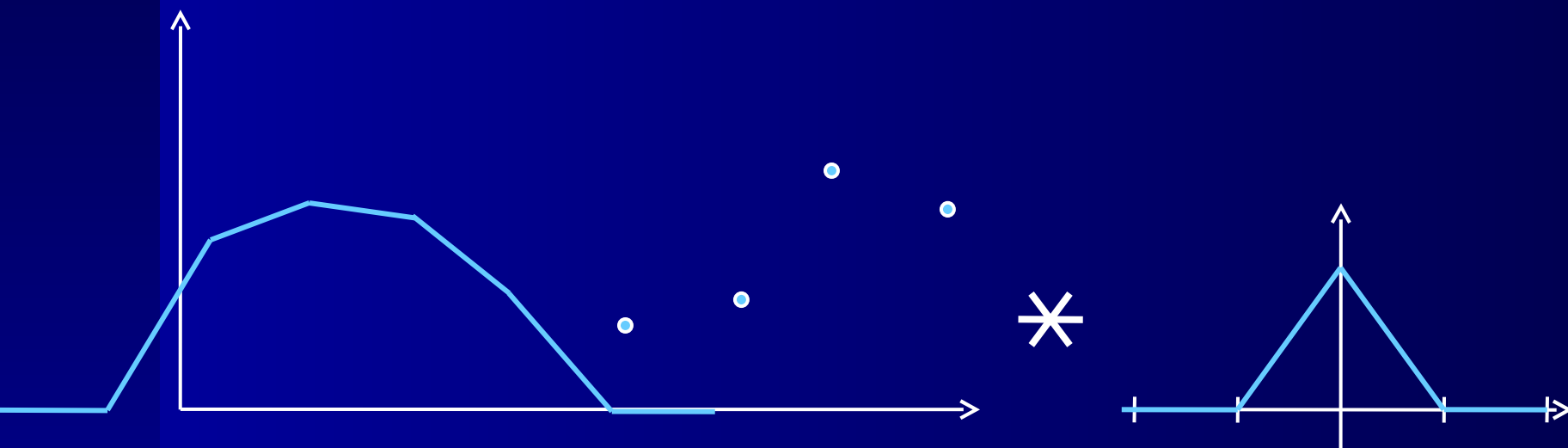




Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

- Пример

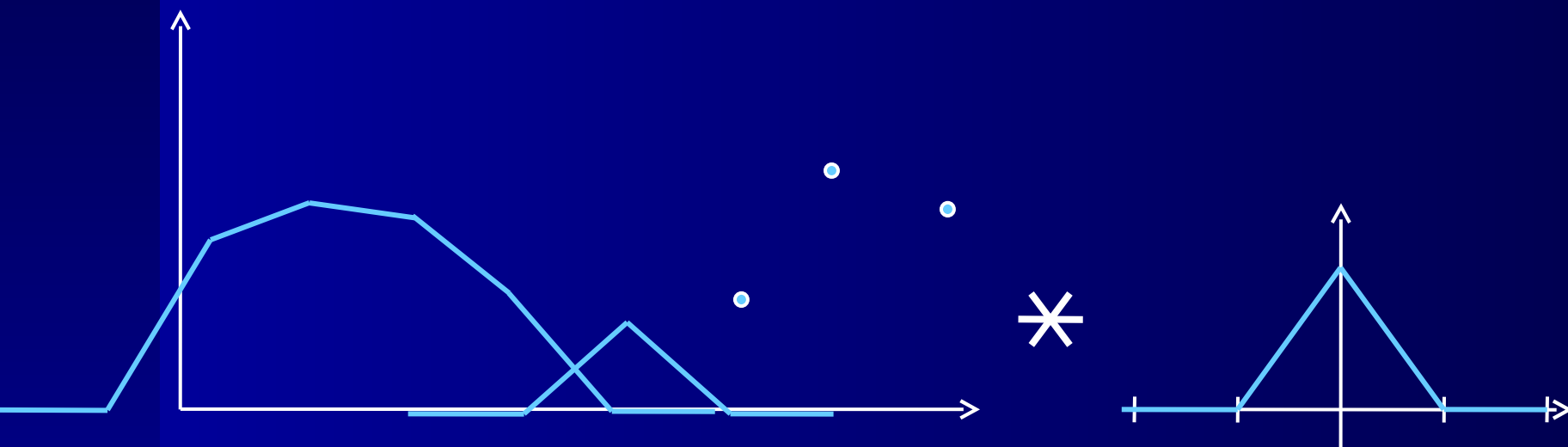




Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

- Пример

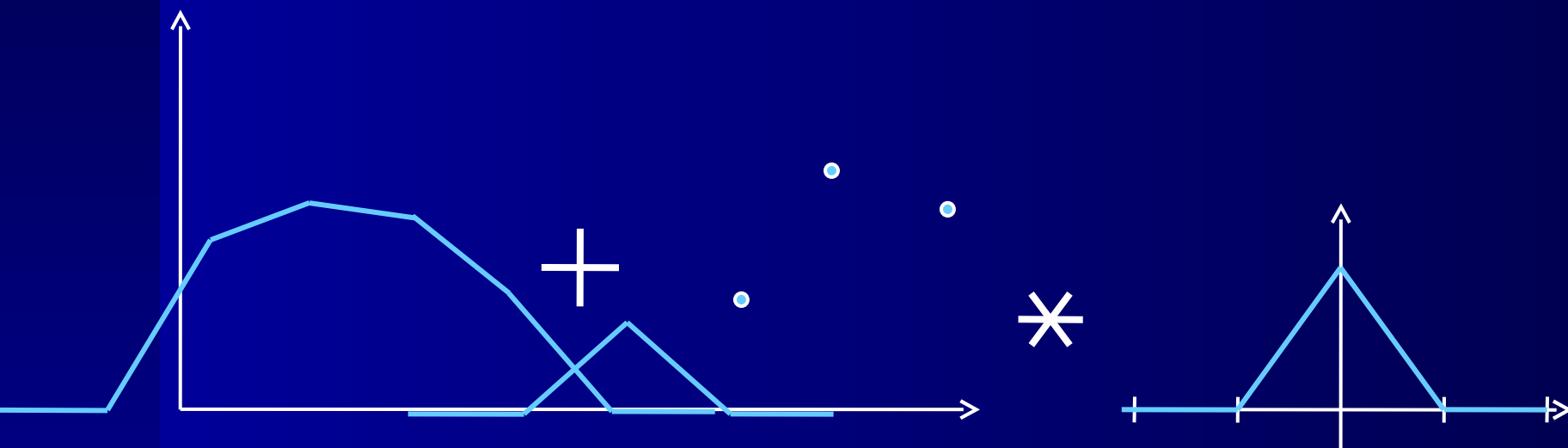




Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

- Пример

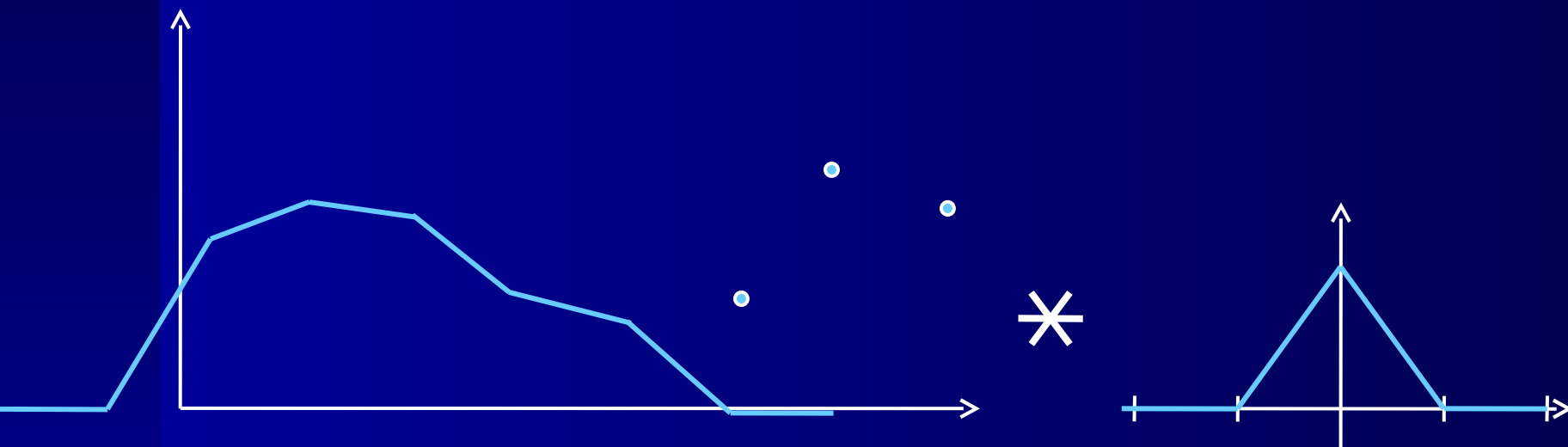




Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

- Пример

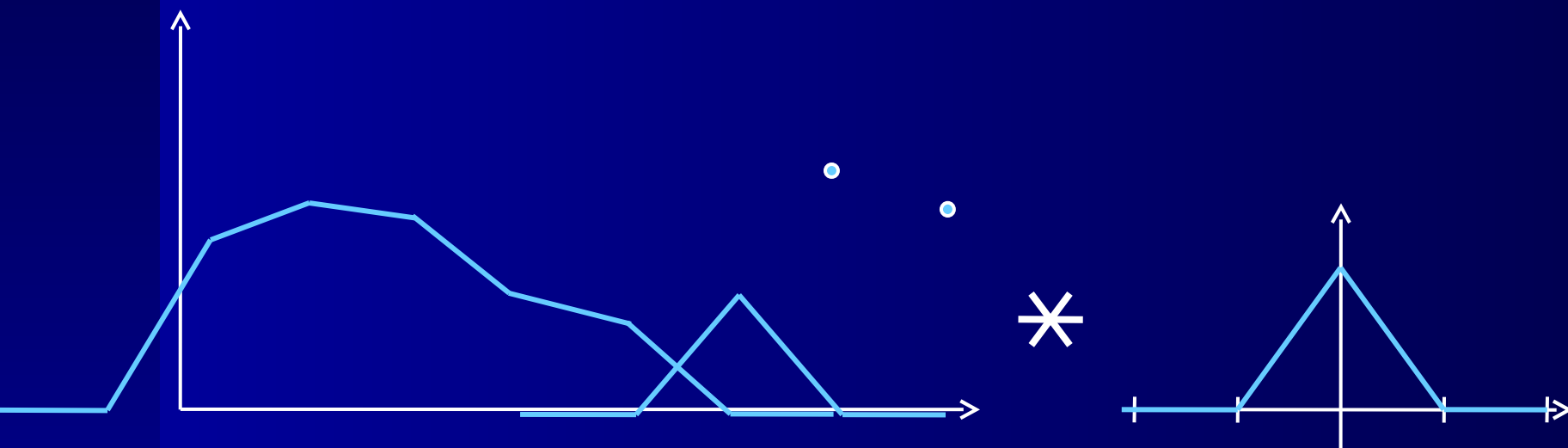




Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

■ Пример

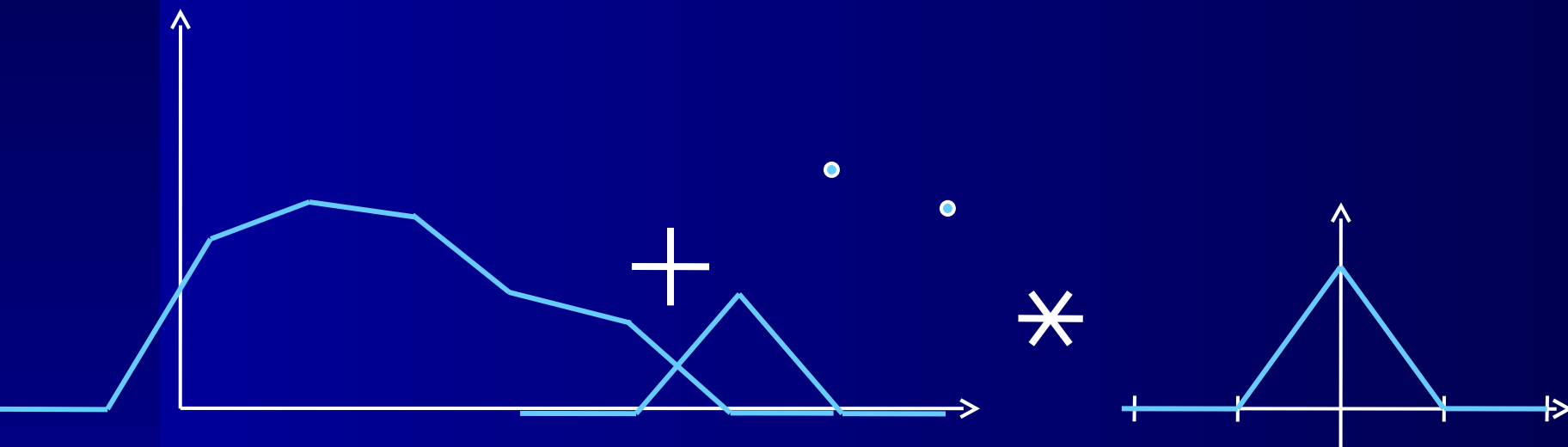




Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

■ Пример

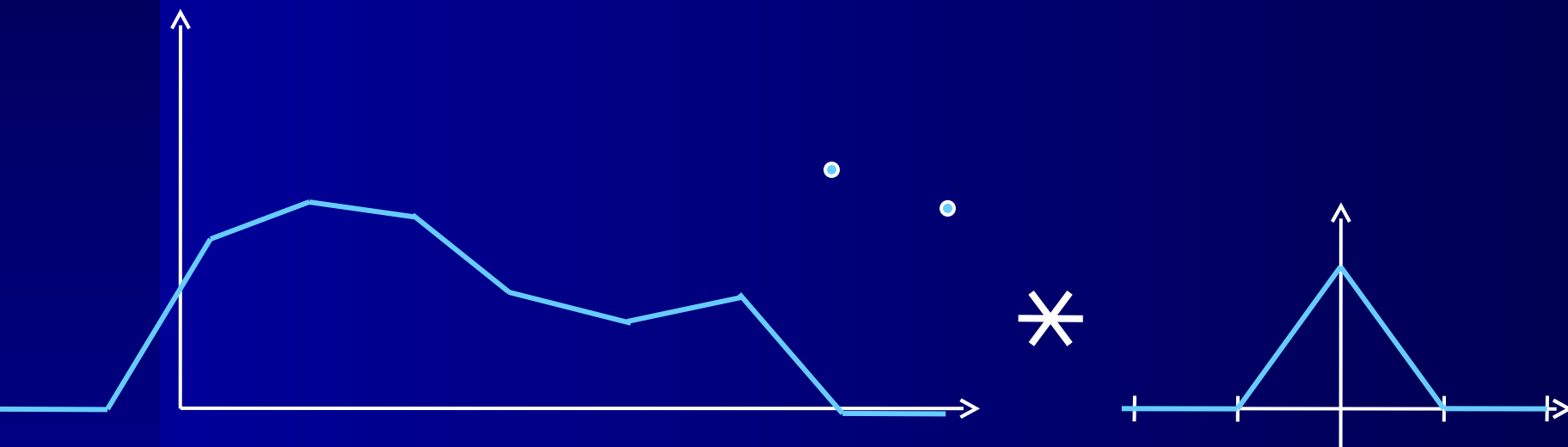




Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

- Пример

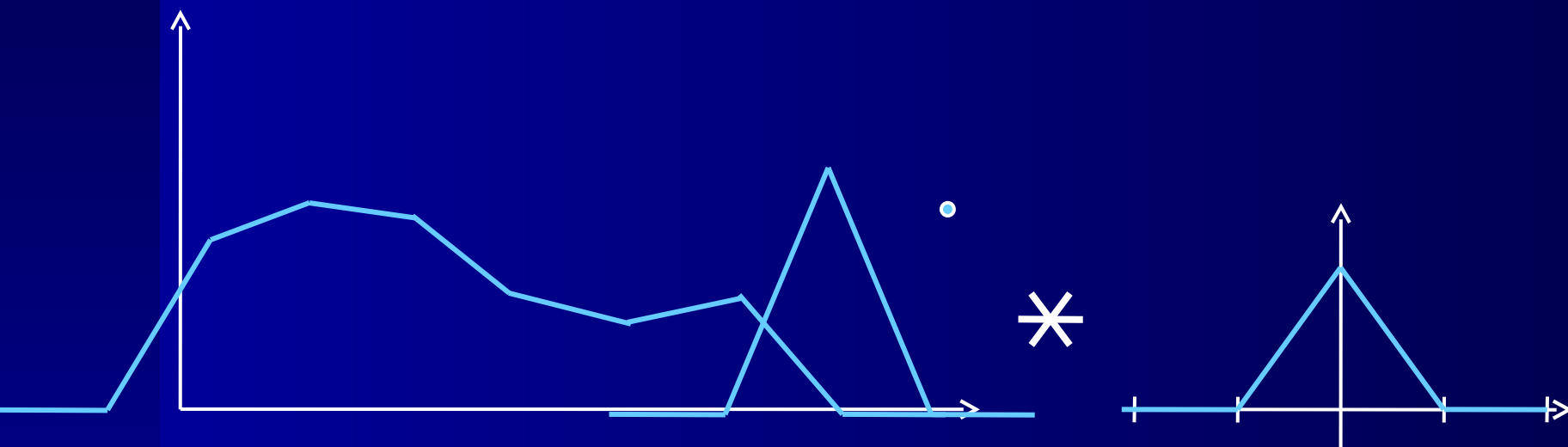




Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

■ Пример

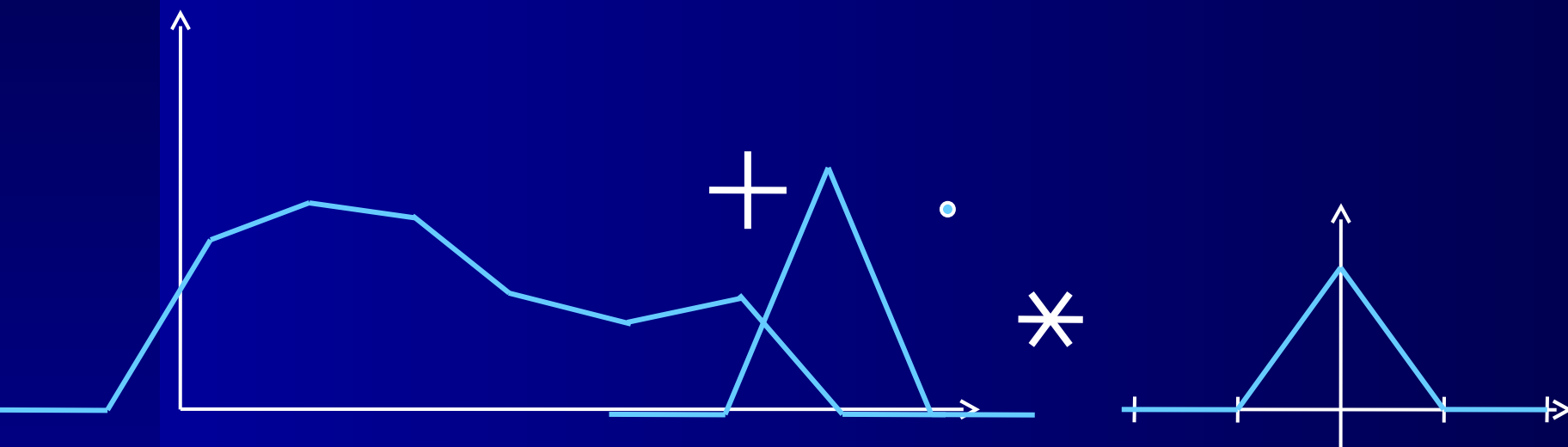




Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

■ Пример

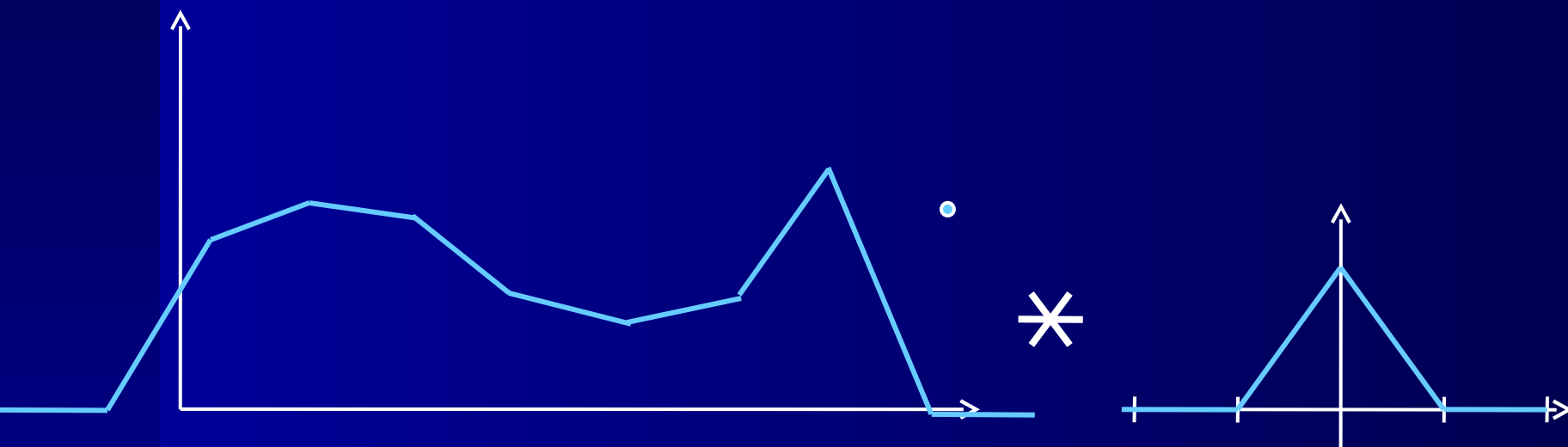




Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

■ Пример

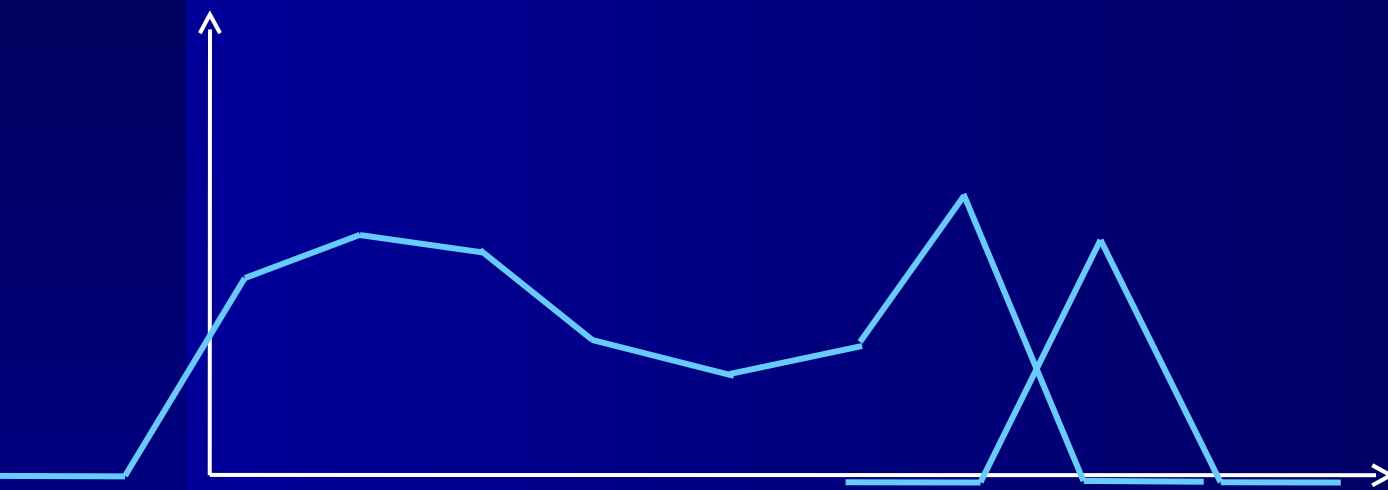




Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

- Пример

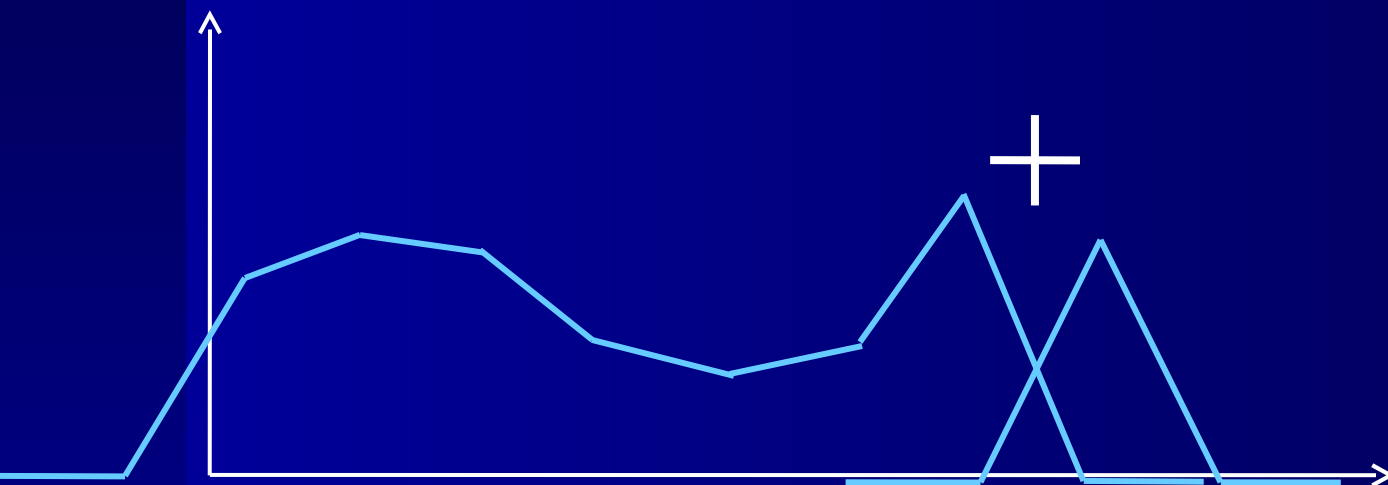




Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

- Пример

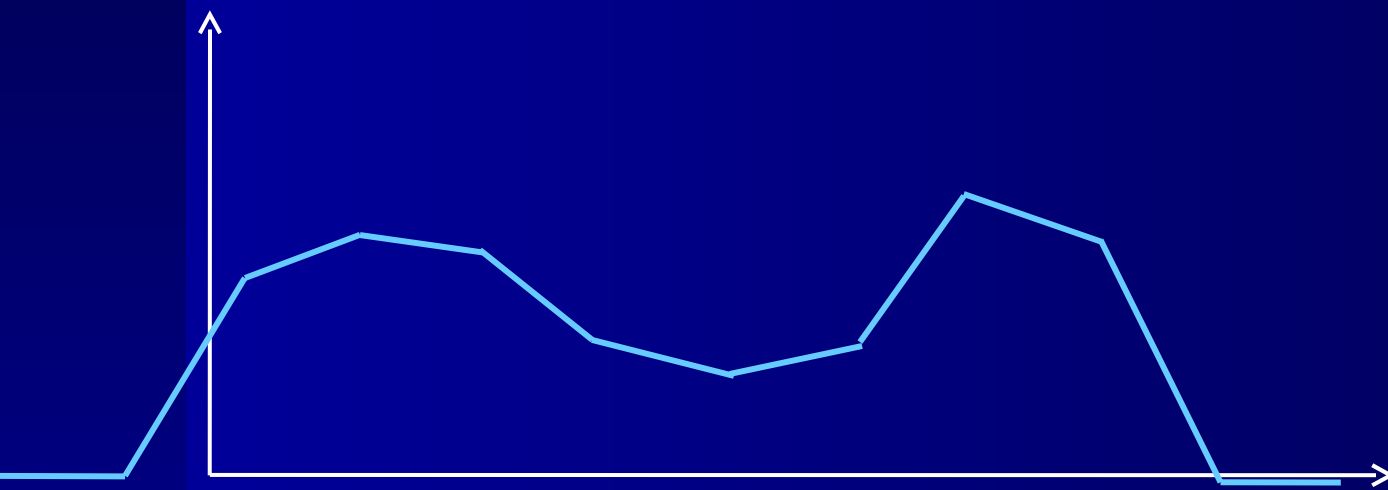




Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

- Пример



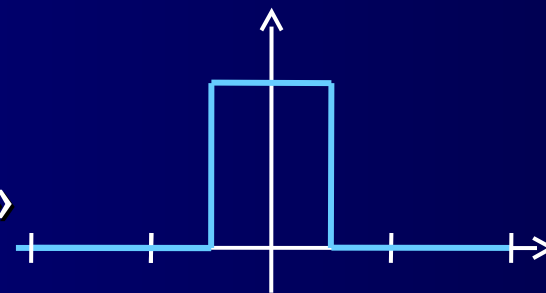


Линейные методы повышения разрешения

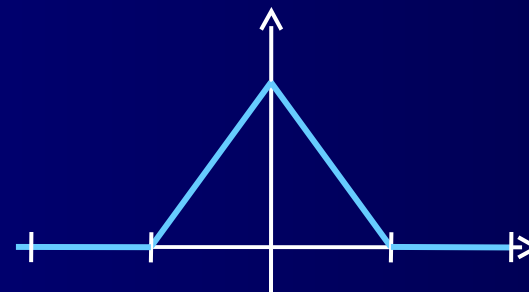
Представление в общем виде

■ Примеры ядер K :

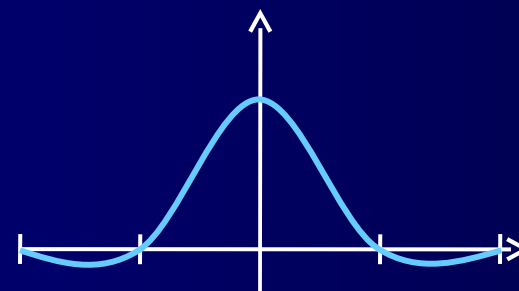
– Метод «ближайшего соседа»



– Линейная интерполяция



– Кубическая интерполяция





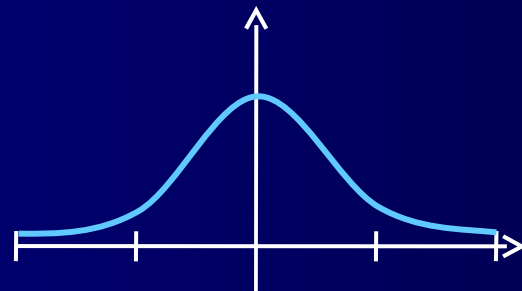
Линейные методы повышения разрешения

Представление в общем виде

■ Примеры ядер K :

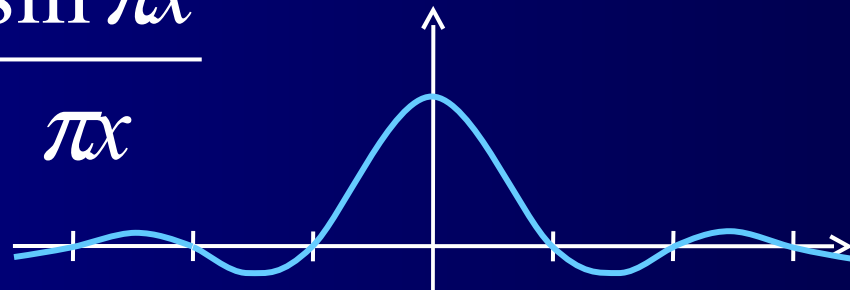
– Гауссовская интерполяция

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$



– «Идеальная» интерполяция

$$K(x) = \text{sinc } \pi x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$





Повышение разрешения изображений

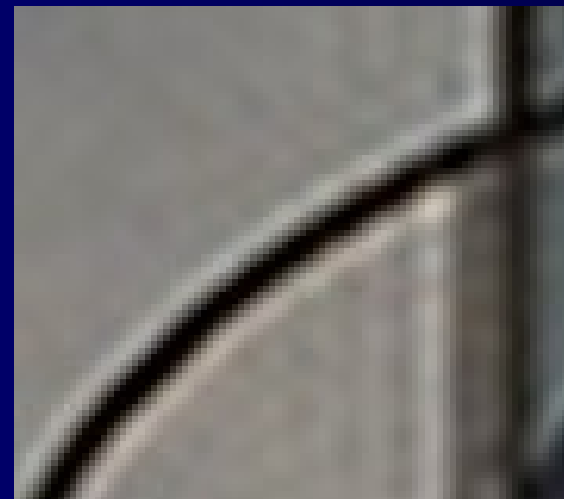
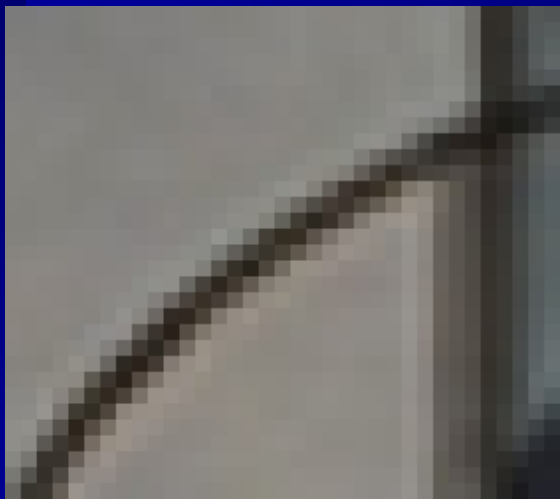
- Введение
- **Линейные методы повышения разрешения**
 - Примеры интерполяции
 - Представление в общем виде
 - **Недостатки линейных методов**
- **Нелинейные методы**
 - Примеры нелинейных методов
 - Регуляризирующий метод
- Суперразрешение



Линейные методы повышения разрешения

Недостатки линейных методов

- Недостатки линейных методов:
 - Алиасинг (неровности, эффект «лесенки»)
 - Размытие
 - Эффект Гиббса

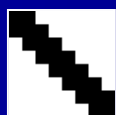




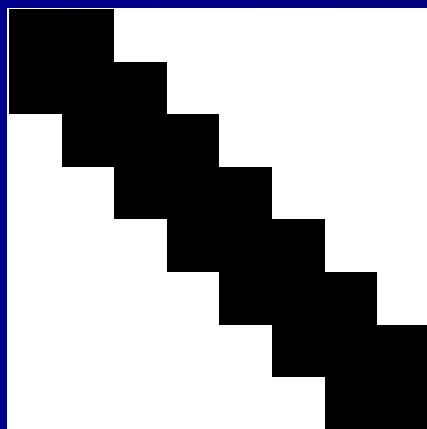
Недостатки линейных методов

Алиасинг

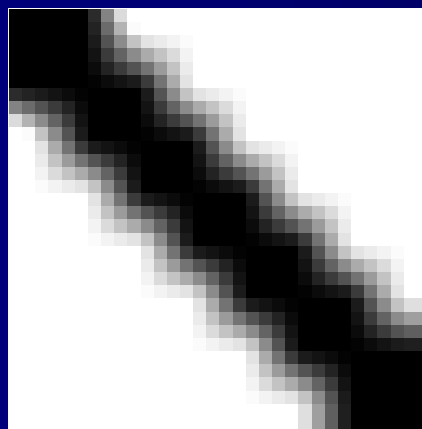
- Значения слова «алиасинг» при увеличении
 - Ступенчатость, неровность



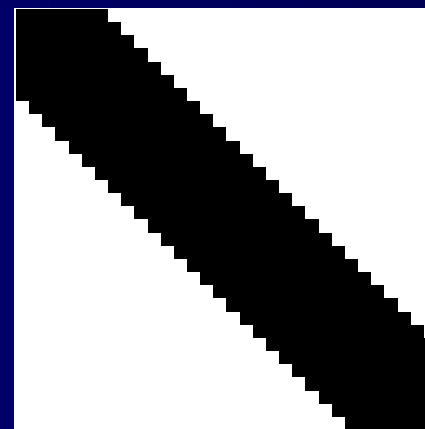
Исходное
изображение



Метод
ближайшего
соседа



Билинейная
интерполяция



Нелинейный
адаптивный
метод

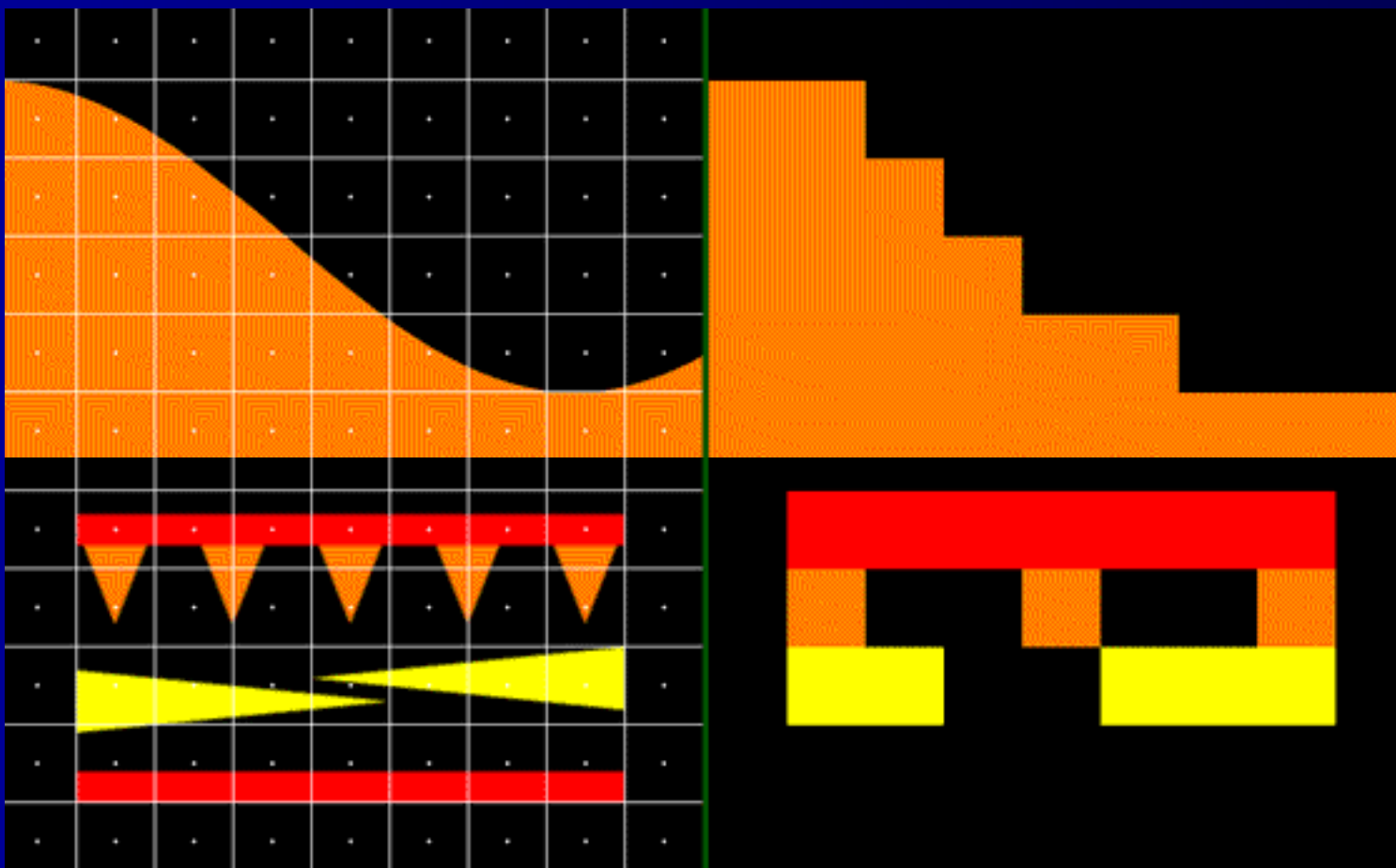
- Другие значения
 - Эффект наложения (при уменьшении)
 - Зубцеобразный дефект (в синтезе)



Недостатки линейных методов

Алиасинг

- Алиасинг как эффект наложения при уменьшении

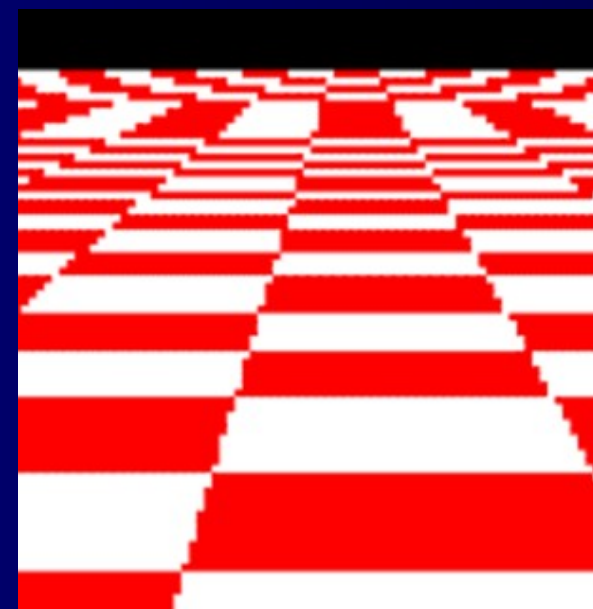
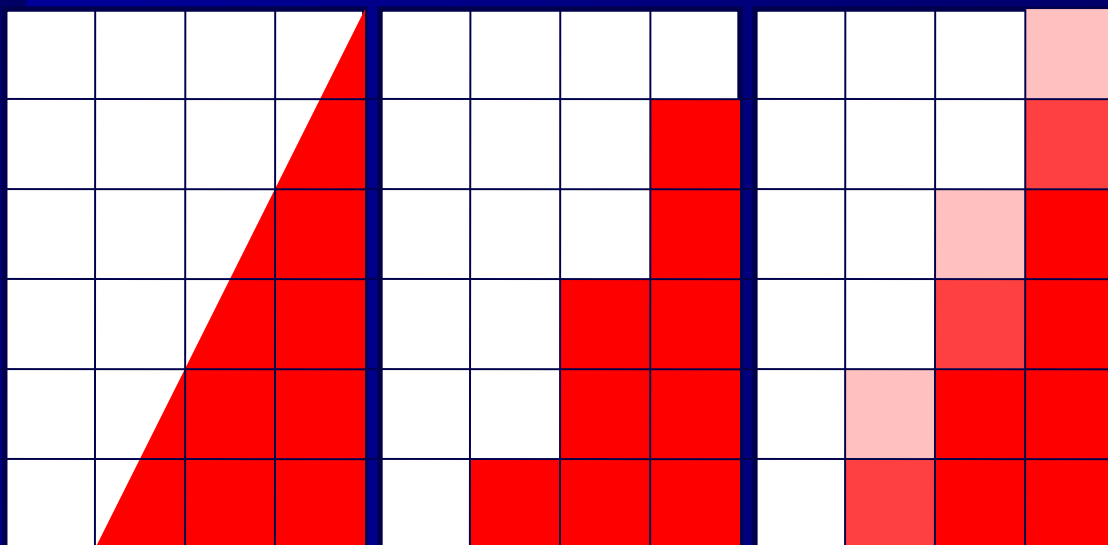




Недостатки линейных методов

Алиасинг

- Алиасинг как зубцеобразный дефект при построении линий и текстур

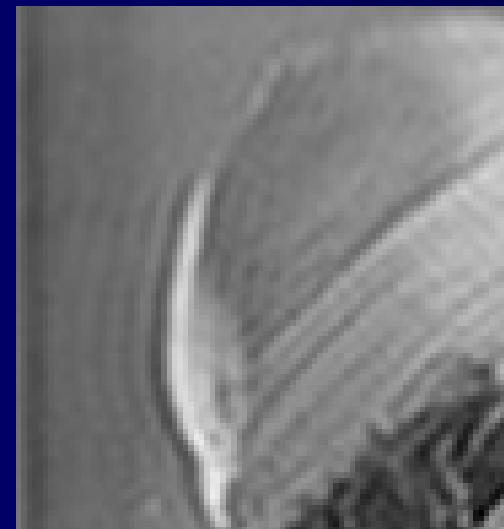
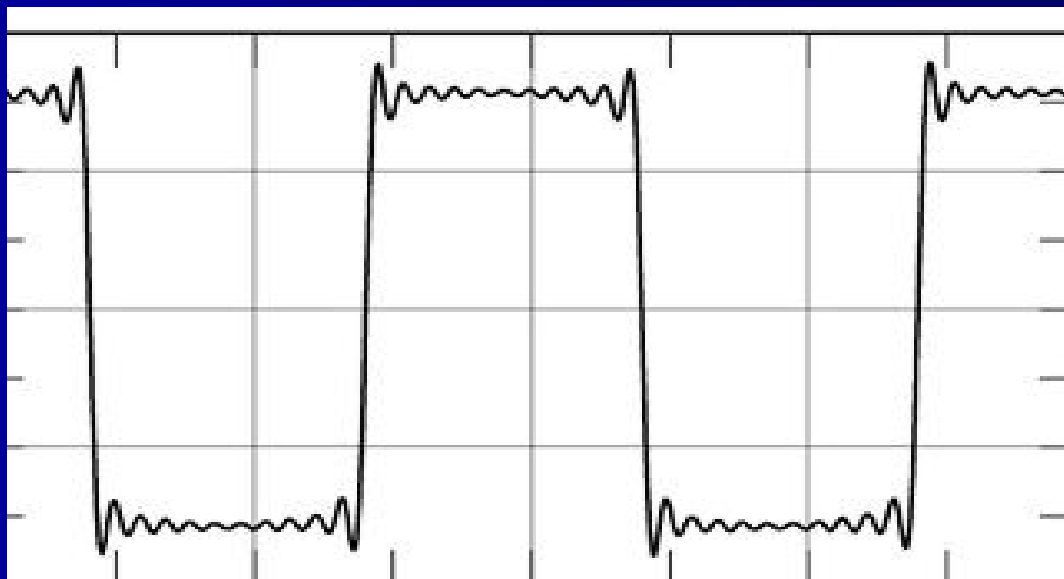




Недостатки линейных методов

Эффект Гиббса

- Эффект Гиббса – это негативный эффект, возникающий при интерполяции. На изображениях проявляется в виде ореолов возле резких перепадов интенсивности

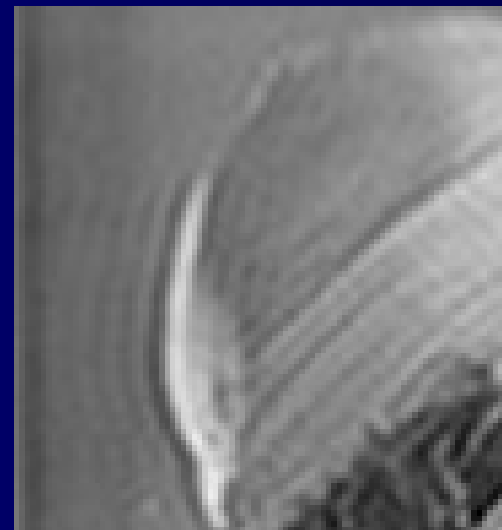
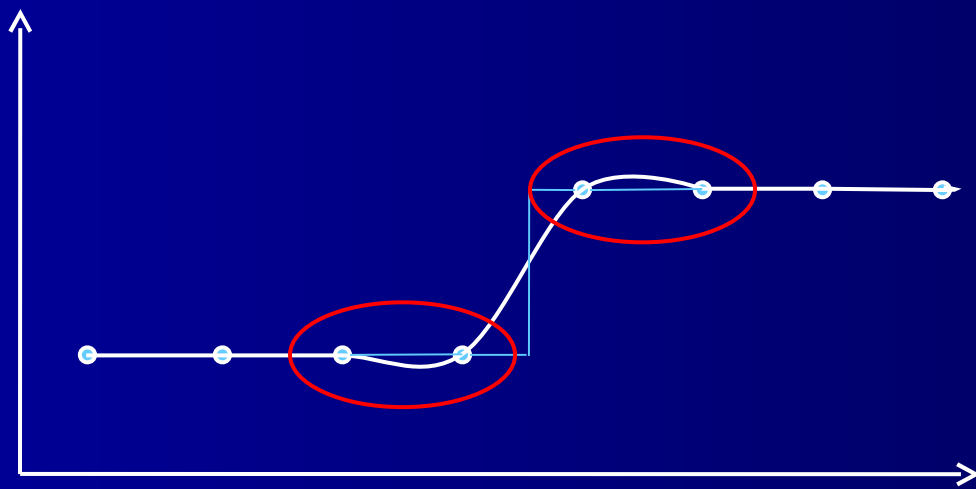




Недостатки линейных методов

Эффект Гиббса

- Эффект Гиббса – это негативный эффект, возникающий при интерполяции. На изображениях проявляется в виде ореолов возле резких перепадов интенсивности





Линейные методы повышения разрешения

Недостатки линейных методов

- Для любого линейного метода присущ свой баланс артефактов





Линейные методы повышения разрешения

Недостатки линейных методов

- Избавиться от недостатков линейных методов можно с помощью адаптивных нелинейных методов



Линейные методы

Нелинейный
метод



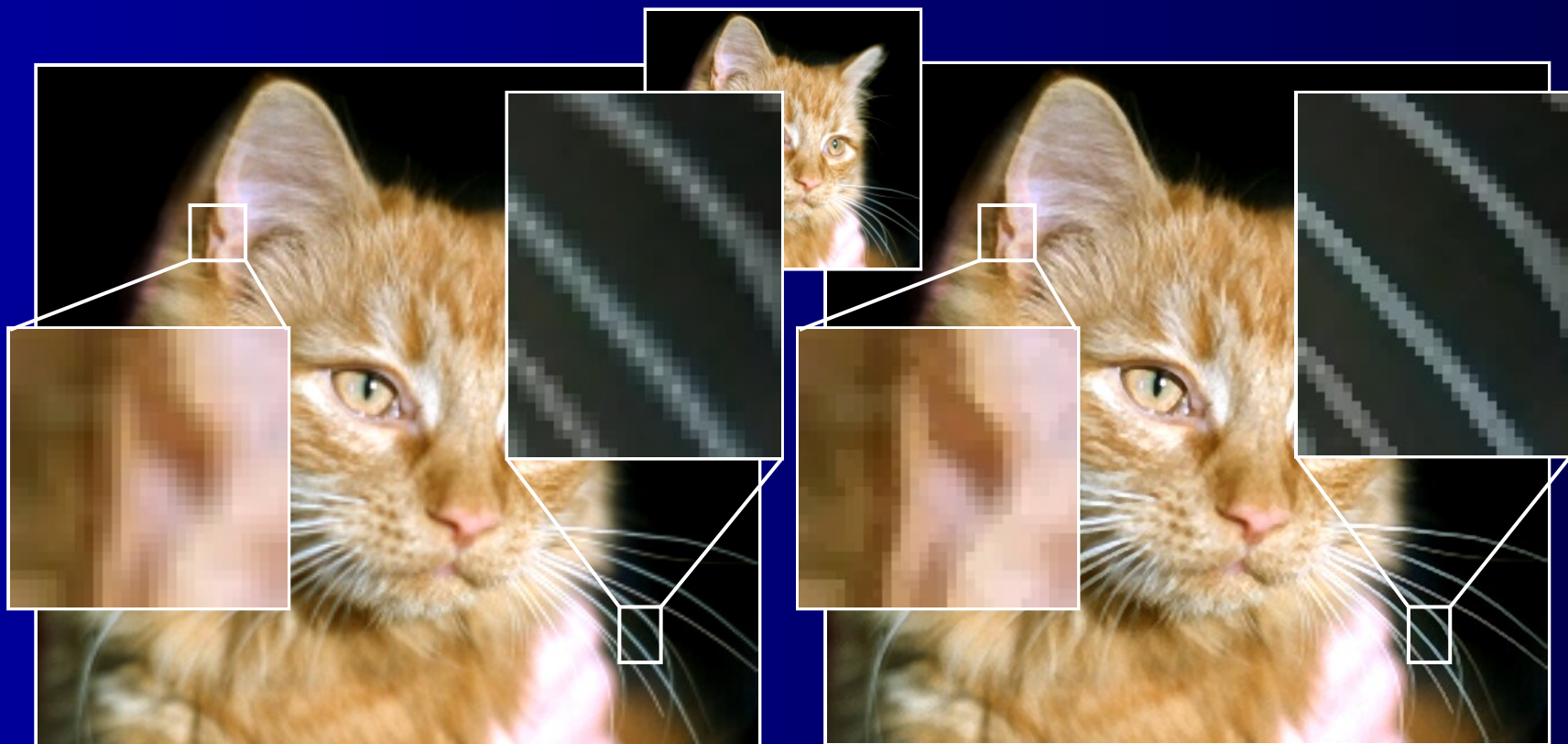
Повышение разрешения изображений

- Введение
- Линейные методы повышения разрешения
 - Примеры интерполяции
 - Представление в общем виде
 - Недостатки линейных методов
- **Нелинейные методы**
 - **Примеры нелинейных методов**
 - **Регуляризирующий метод**
- Суперразрешение



Нелинейные методы

Примеры нелинейных методов



■ билинейная
интерполяция

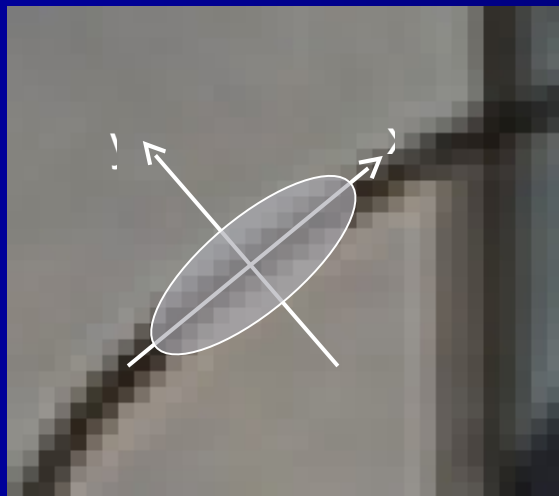
■ нелинейный метод



Примеры нелинейных методов

Градиентные методы

- Основная идея: использование разных ядер для интерполяции вдоль и поперёк границ

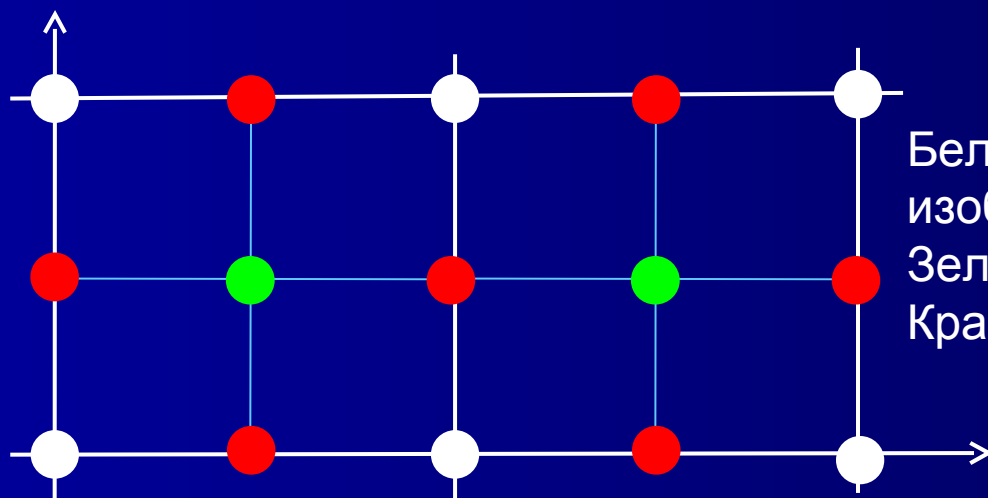


$$f(x, y) = \sum_{i, j=-\infty}^{+\infty} F(i, j) K_x(i-x) K_y(j-y)$$



Примеры нелинейных методов NEDI

- Увеличение только в 2 раза
- Основная идея: самоподобие изображения при увеличении

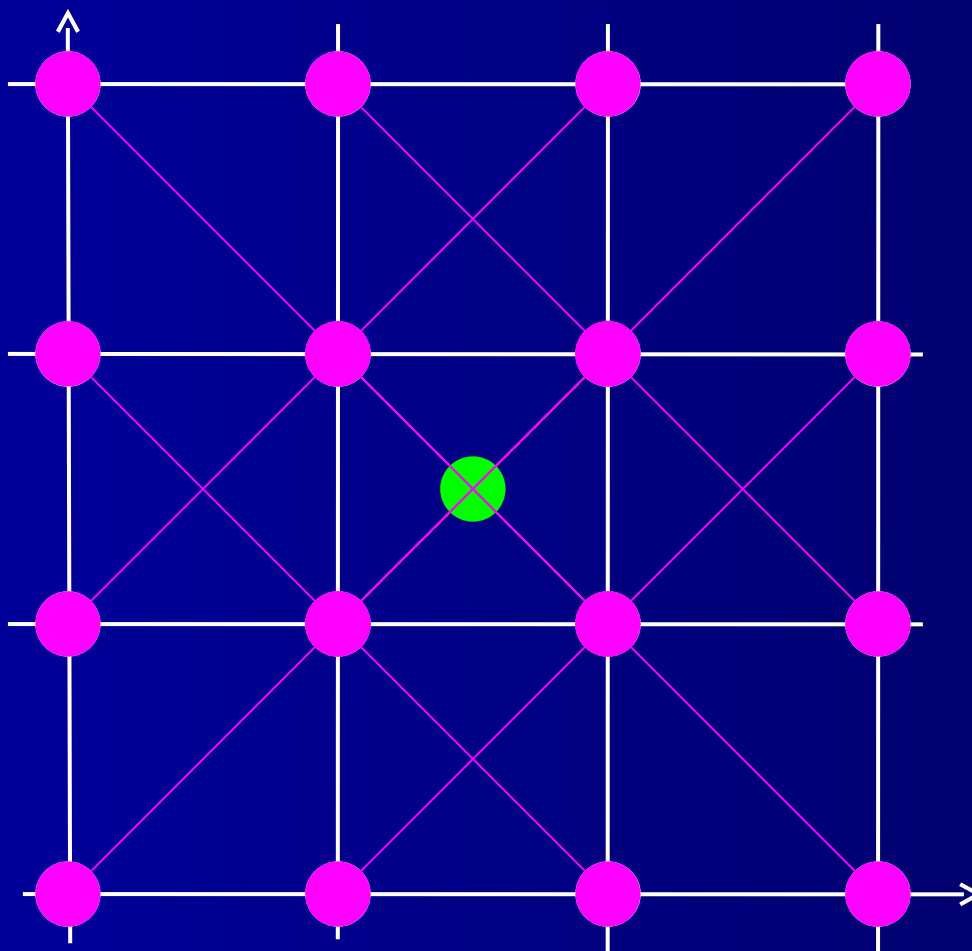


Белый цвет – пиксели исходного изображения
Зелёный – первый проход
Красный – второй проход



Примеры нелинейных методов NEDI

■ Первый проход

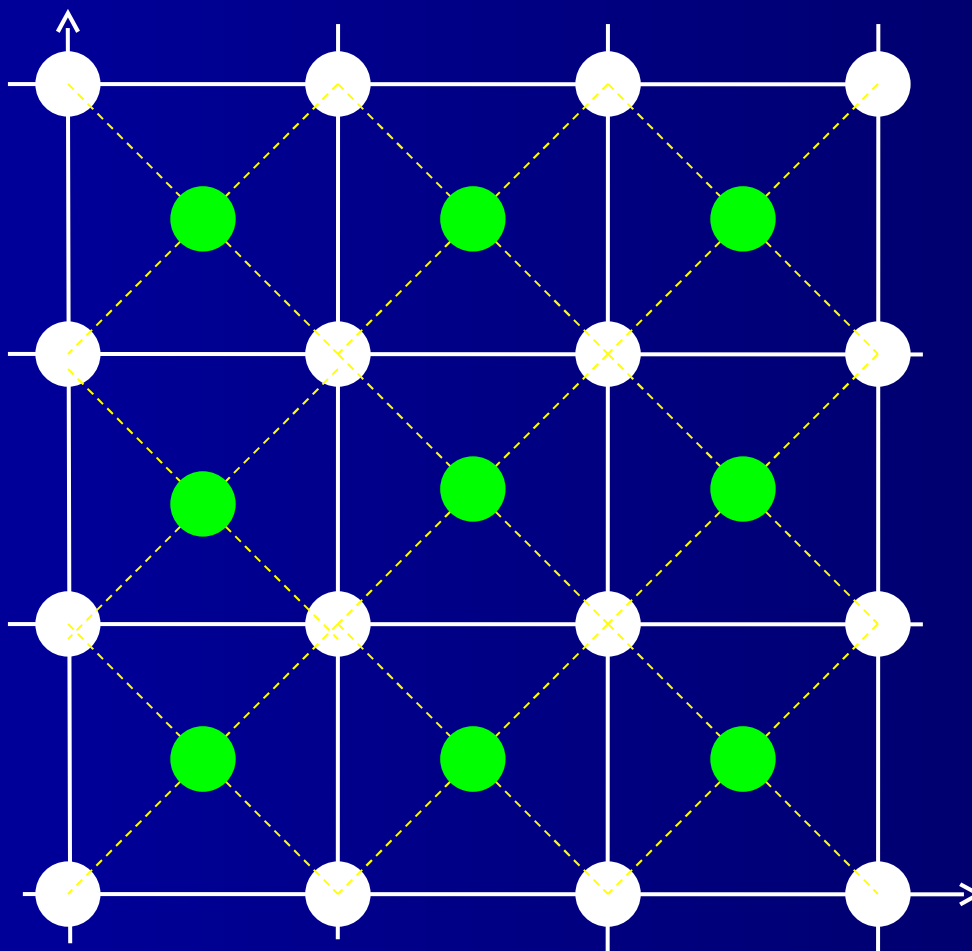


Коэффициенты
выбираются из
предположения, что эти же
коэффициенты
использовались при
получении текущего
изображения из его
уменьшенной версии



Примеры нелинейных методов NEDI

■ Второй проход

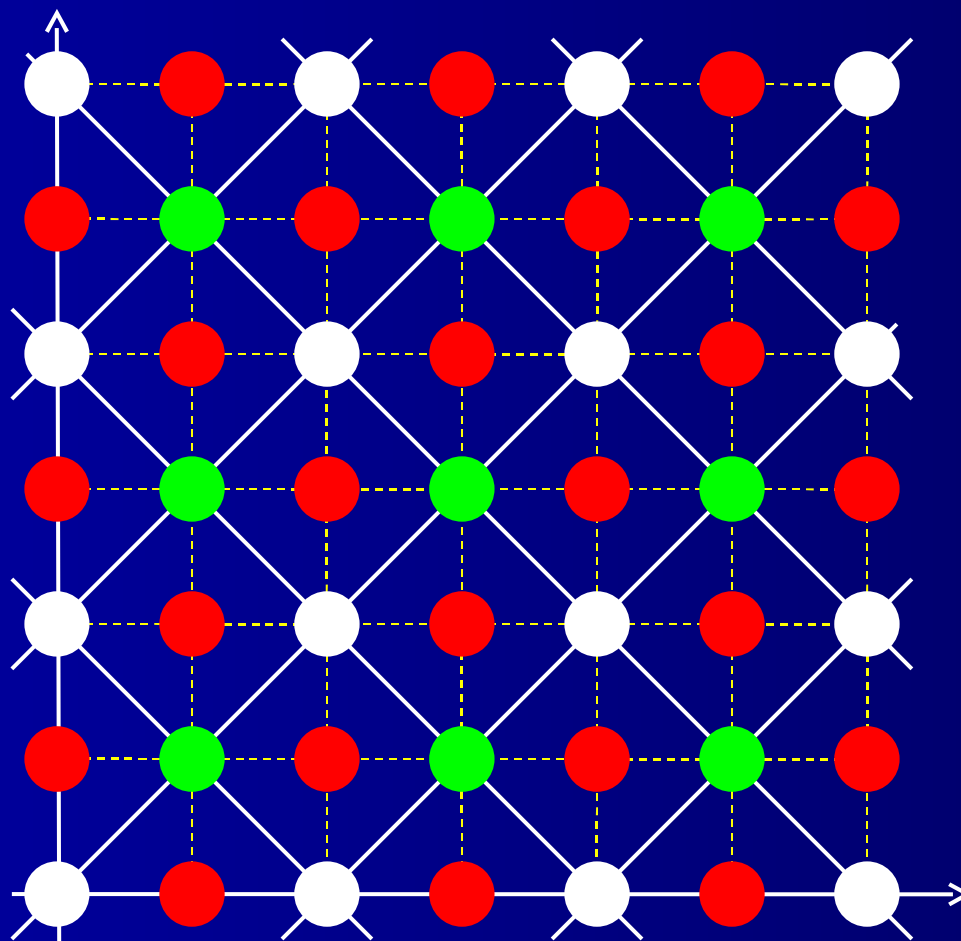


Второй проход аналогичен
первому.
В интерполяции участвуют
пиксели, посчитанные в
первом проходе



Примеры нелинейных методов NEDI

■ Второй проход



Второй проход аналогичен первому.
В интерполяции участвуют пиксели, посчитанные в первом проходе



Примеры нелинейных методов

Обратная задача

- Постановка задачи в виде уравнения

$$Az = u$$

где z – увеличенное изображение,
 u – уменьшенное изображение,
 A – оператор, уменьшающий изображение

- Увеличение как решение уравнения с применением итерационных методов
- **Проблемы:** для одного и того же u существует несколько z + неустойчивость.



Нелинейные методы

Регуляризирующий метод

- Одним из способов решения некорректной задачи $Az=u$ является метод регуляризации, созданный основоположником факультета ВМК академиком А.Н.Тихоновым
- Регуляризация сводит некорректно поставленную задачу к корректной за счет использования дополнительных ограничений.





Нелинейные методы

Регуляризирующий метод

- Решение задачи повышения разрешения ищется в виде

$$z^* = \arg \min_{z \in Z} \left(\|Az - u\|_2^2 + \alpha F(z) \right)$$

где $\|z\|_2^2 = \sum_{i,j} z_{i,j}^2$

α - параметр регуляризации



■ Выбор стабилизатора

– ТИХОНОВСКИЙ $F_T(z) = \|\Delta z\|_2^2$

– Total Variation $F_{TV}(z) = \|\nabla z\|_1$ $\|z\|_1 = \sum_{i,j} |z_{i,j}|$

– Bilateral TV $F_{Bilateral TV}(z) = \sum_{-p \leq s, t \leq p} \gamma^{|s|+|t|} \|z - S_x^s S_y^t z\|_1$

S_x^s S_y^t

$\gamma = 0,8$

и - операторы сдвига по осям x и y на s и t пикселей соответственно, , p=1



Нелинейные методы

Регуляризирующий метод

- Для минимизации регуляризирующего функционала

$$z^* = \arg \min_{z \in Z} \left(\|Az - u\|_2^2 + \alpha \sum_{s,t=-p}^{s,t=p} \gamma^{|s|+|t|} \|z - S_x^s S_y^t z\|_1 \right)$$

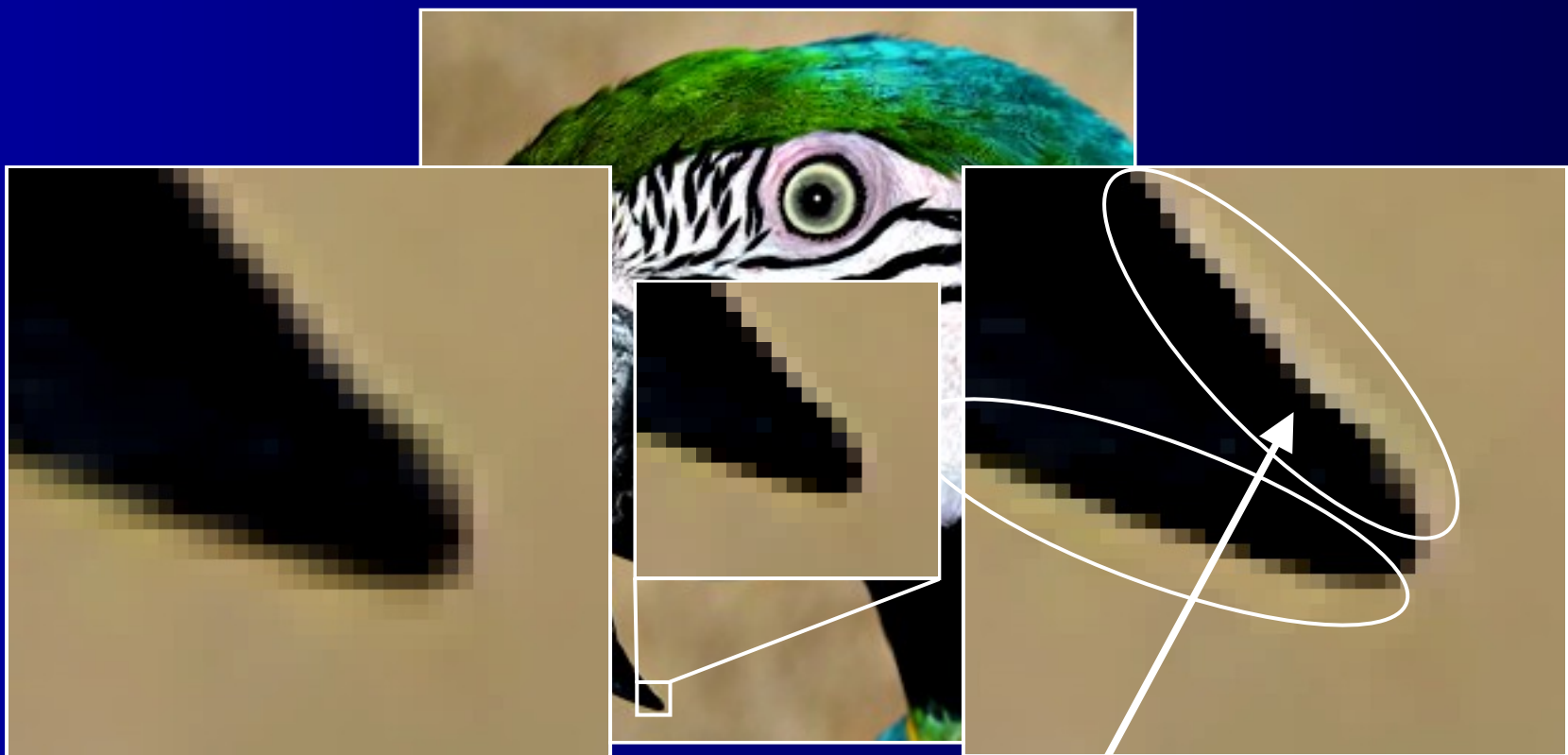
применяется итерационный
субградиентный метод

$$z_{n+1} = z_n - \beta \{ 2H^T D^T (DH z_n - u) + \\ + \alpha \sum_{-p \leq s, t \leq p} \gamma^{|s|+|t|} (I - S_x^{-s} S_y^{-t}) \text{sign}(z_n - S_x^s S_y^t z_n) \}$$



Нелинейные методы

Регуляризирующий метод



билинейная интерполяция

регуляризирующий метод

■ эффект Гиббса



Нелинейные методы

Регуляризирующий метод



- Регуляризирующий метод



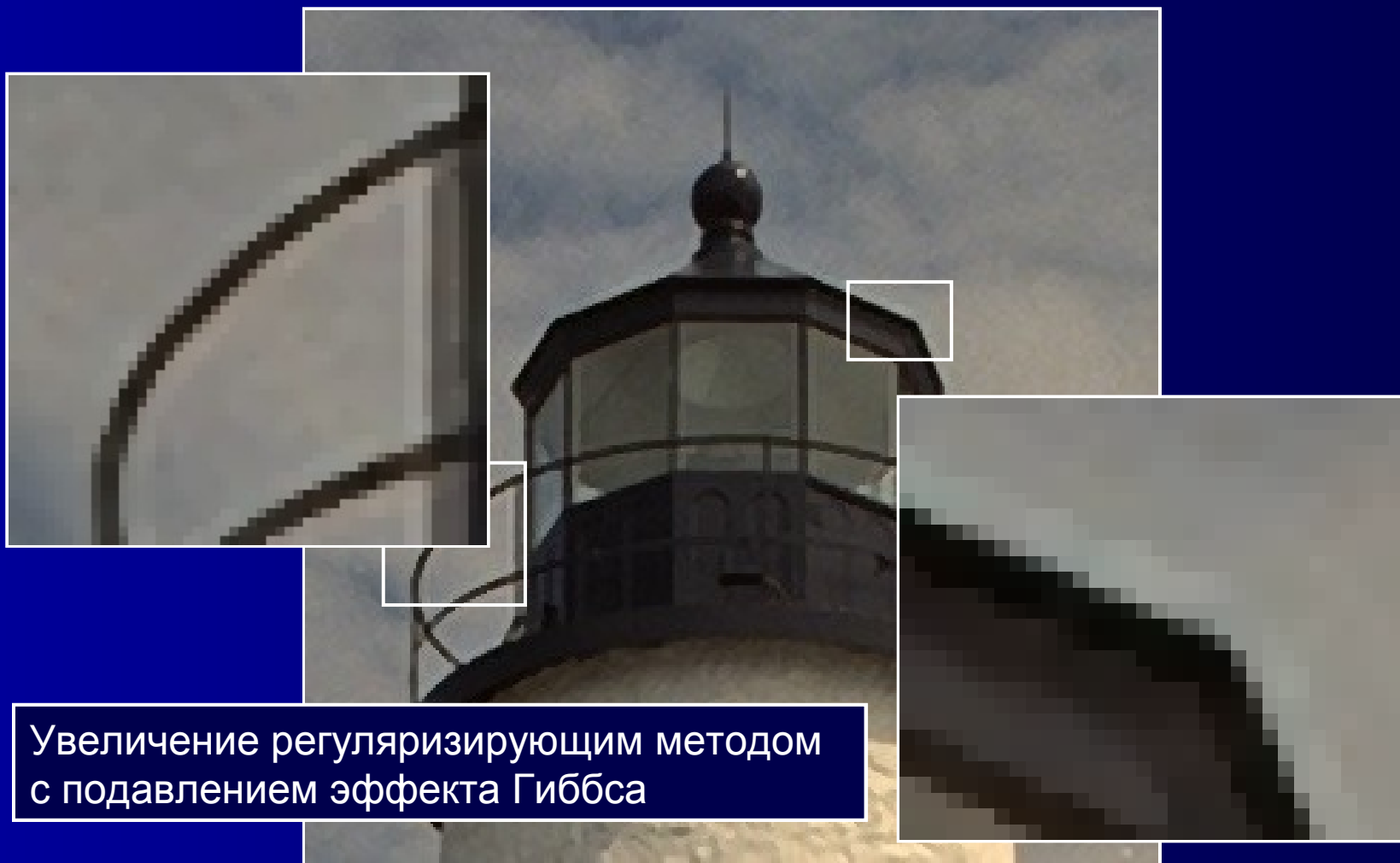
- Постобработка методом квазирешений



Нелинейные методы

Увеличение с подавлением эффекта Гиббса

<http://imaging.cs.msu.ru/software>



Увеличение регуляризирующим методом
с подавлением эффекта Гиббса



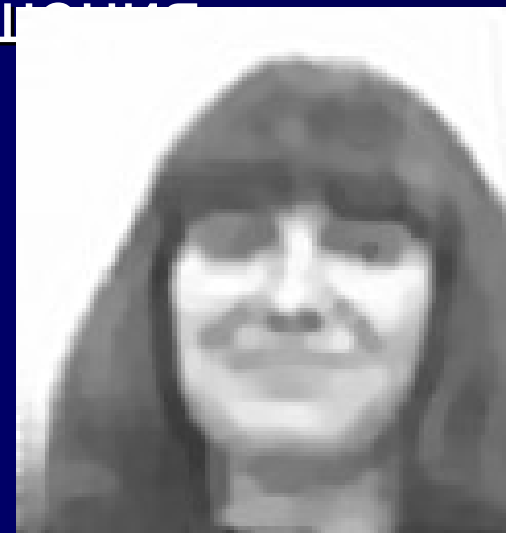
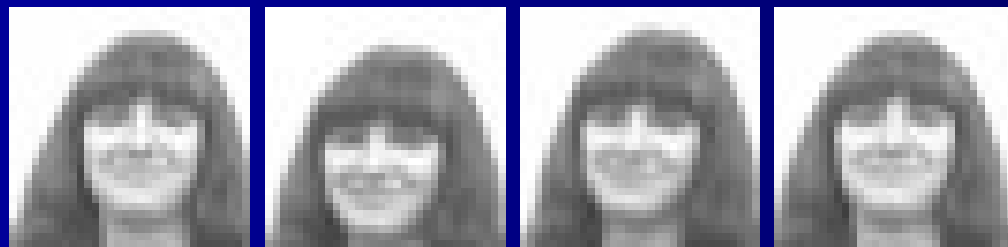
Повышение разрешения изображений

- Введение
- Линейные методы повышения разрешения
 - Примеры интерполяции
 - Представление в общем виде
 - Недостатки линейных методов
- Нелинейные методы
 - Примеры нелинейных методов
 - Регуляризирующий метод
- Суперразрешение



Суперразрешение

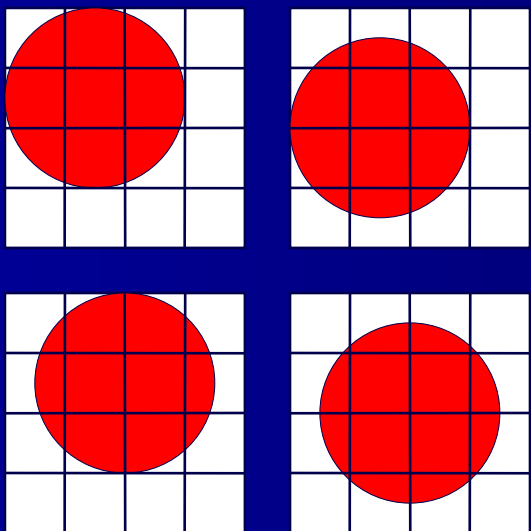
- Задача суперразрешения – это реконструкция изображения высокого разрешения по нескольким изображениям низкого разрешения



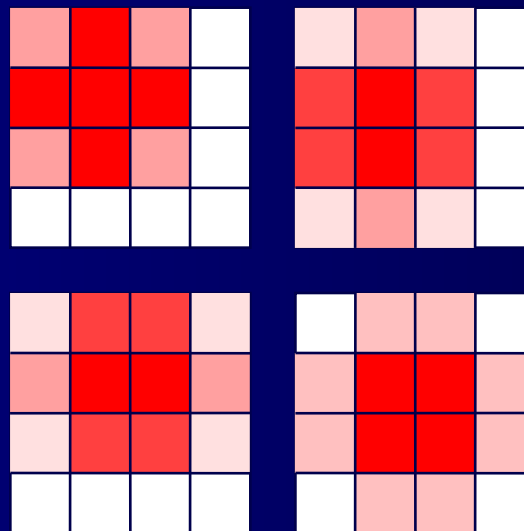


Суперразрешение

- Источник дополнительной информации – субпиксельные сдвиги



Движущийся объект

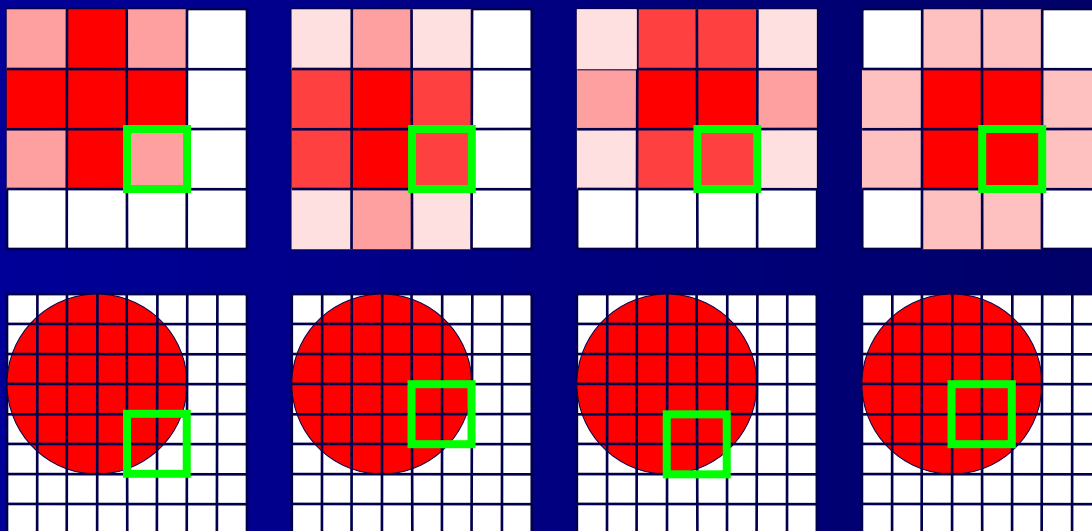


Получаемые с камеры изображения



Суперразрешение

- Зная информацию о сдвигах, можно построить изображение более высокого разрешения



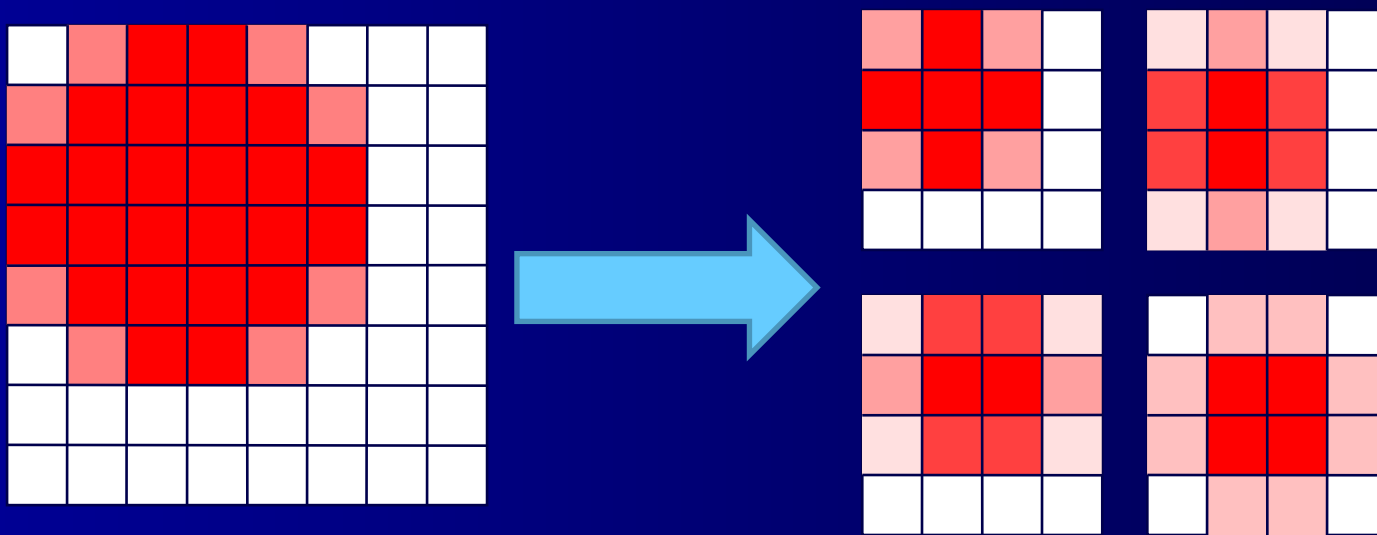
Получаемые с камеры изображения

Соответствие между пикселями изображений низкого разрешения и реконструируемого изображения высокого разрешения



Суперразрешение

- Построение через решение обратной задачи: найти такое изображение высокого разрешения, которое, будучи уменьшенным с учётом сдвигов, даст исходные изображения





Суперразрешение

- A_k – оператор понижения разрешения

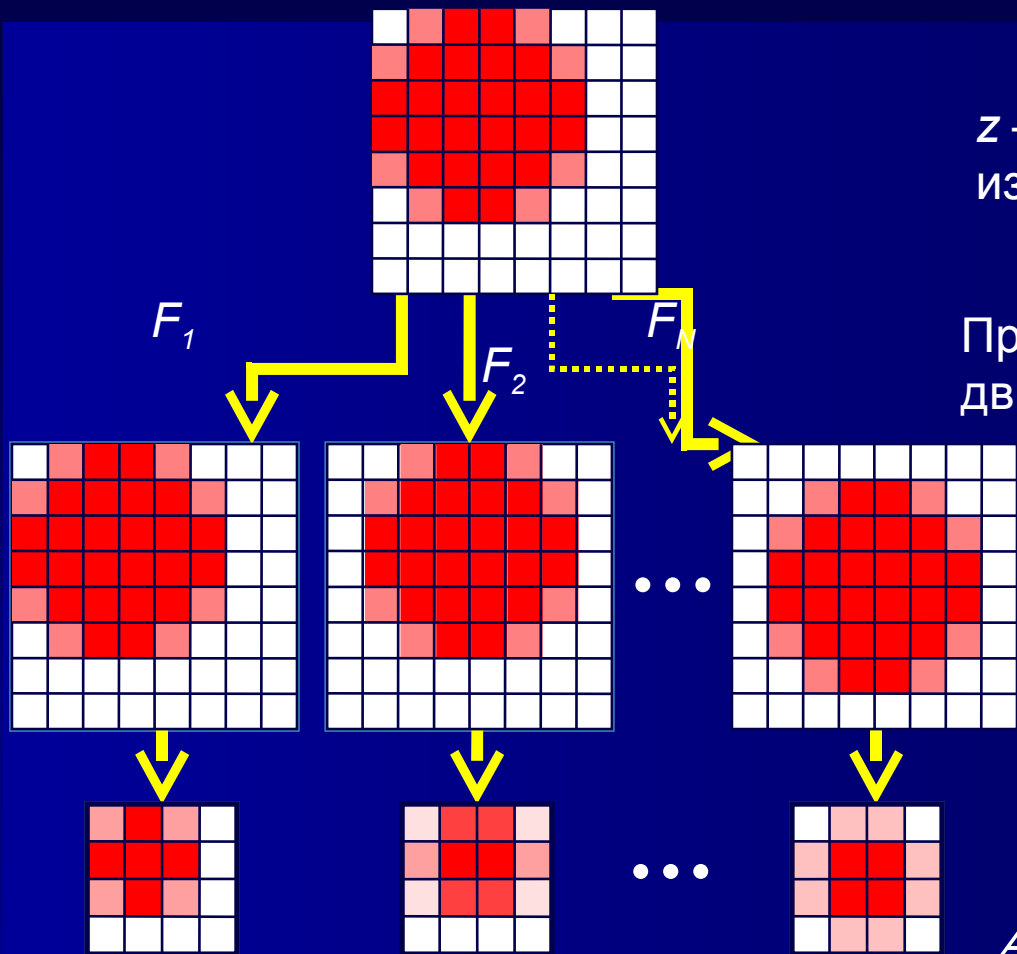
$$A_k z = DH_{cam} F_k H_{atm} z + n$$

- H_{cam} – размытие камерой (подавление алиасинга, моделируется фильтром Гаусса)
- H_{atm} – эффекты в среде
- n – шум
- F_k – оператор смещения (оптического потока)
- D – оператор прореживания

$$A_k z = DHF_k z$$



Суперразрешение



z – реконструируемое изображение

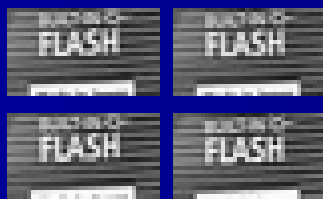
Применение операторов движения F_k

Уменьшение изображений (операторы D и H)

$$A_k z = DHF_k z$$



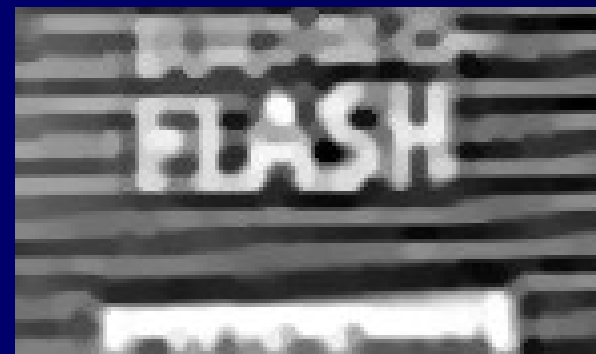
Суперразрешение



Исходные
изображения



Метод ближайшего
соседа



Нелинейный метод
интерполяции



Быстрая реализация
супер-разрешения



Качественная реализация
супер-разрешения



Суперразрешение



Бикубическая интерполяция



Суперразрешение

Увеличение видео в 4 раза



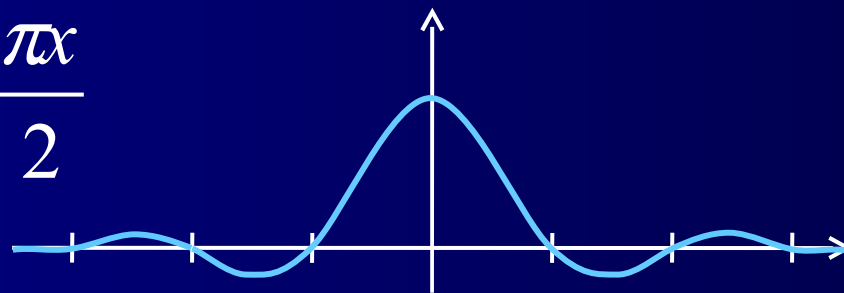
Спасибо за внимание!



Интерполяция

- Примеры ядер:
 - Интерполяция Ланцоша 2 и 3 порядка

$$K_2(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \sin \frac{\pi x}{2}$$

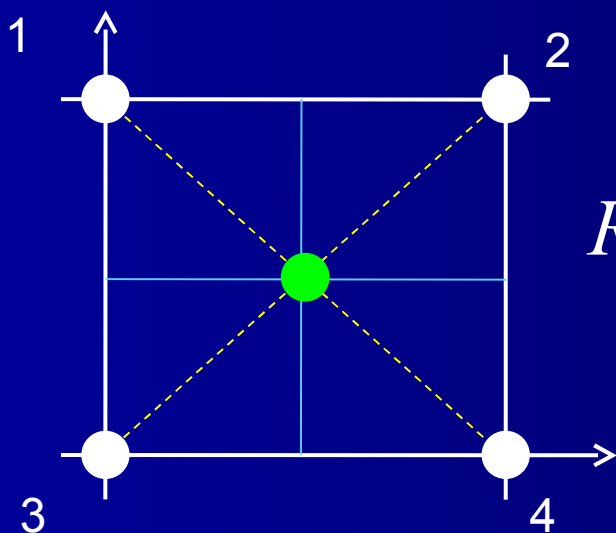


$$K_3(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \sin \frac{\pi x}{3}$$



Примеры нелинейных методов NEDI

■ Первый проход



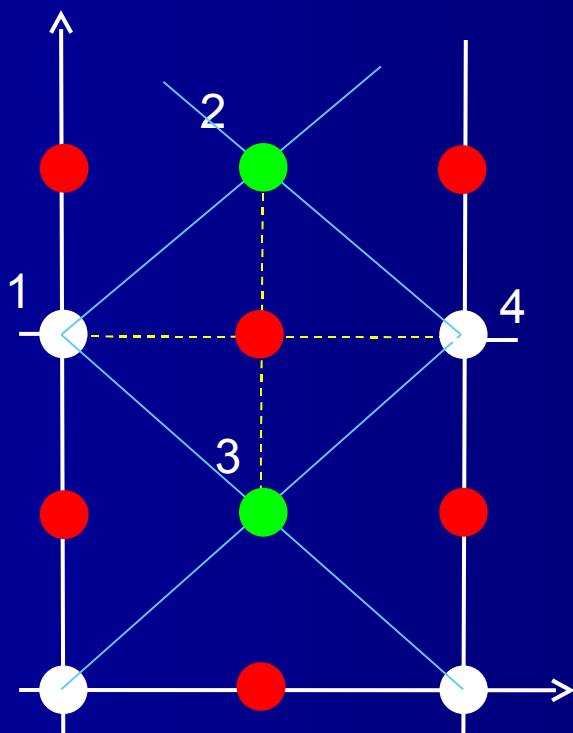
$$R = a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 + a_4 C_4$$

Коэффициенты a_k выбираются из предположения, что эти же коэффициенты использовались при получении текущего изображения из его уменьшенной версии



Примеры нелинейных методов NEDI

■ Второй проход



Второй проход аналогичен первому.
В интерполяции участвуют пиксели,
посчитанные в первом проходе